Conforme aux nouveaux programme du ministère de l'éducation nationale de la formation professionnelle de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

EL HAJJAJI MATHS

- EXERCICES D'ENTRAINEMENT
- EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT
- LES METHODES PAS A PAS
- CORRIGES DETAILLES ET EXPLIQUES

2EME ANNEE BACCALAUREAT
SCIENCES EXPERIMENTALES (PC. SVT. ...)

TOME 1

LA DERIVABILITE

Ecrit et réalisé par : Prof: EL BACHIR EL HAJJAJI

الأستاذ : البشير الحجّاجي

استاذ التّعليم الثّانوي التّأهيلي
بثانويّة المسيرة الخضراء التّأهيليّة
المديريّة الإقليميّة تيزنيت .

شُكرٌ خاص

الشُّكر الموصول لِكُلٍّ مِنَ:

- الأستاذ : إبراهيم الحجّاجي ، أخي الأكبر وصاحب الفضل الكبير

- السّيد : إبراهيم إضرضار ، المدير الاقليمي بالمديريّة الإقليميّة تيزنيت ، على دعمه المتواصل

- السّيد: حسن بوليد ، مفتش مادة الرياضيات بالمديريّة الإقليميّة تيزنيت

نسألكم الدُّعاء

مُقدّمة

الحمدُ لله ، والصّلاةُ والسّلامُ على مَولانا رسُولِ الله .
تزامُناً مع بِدايةِ الدُّخول المدْرسِي 2020-2021، والذي يتّسِمُ بظُرُوفٍ خاصّةٍ ، أُهدِي لِتلامذةِ السّنة الثّانية بكالوريا علُوم تجريبيّة ، بجميع مسالكها هذا العمل المتواضِع الذي يحْتوي على تمارِين محْلُولة ، وكذا تمارين للبحْث. راجياً مِن العَلِي القدير أن لا تنْسَونا مِن خالِص دُعائكُم

بخطّ البشير الحجّاجي
استاذ مادّة الرياضيات
الثّانوية التّأهيليّة المسِيرة الخضْراء
المديرية الإقليمية تيزنيت

نسألكم الدُّعاء

EXERCICE 1

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, puis donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 dans chacun des cas suivants :

1 ~ $f(x) = -3x - 1$ et $x_0 = 2$

2 ~ $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ et $x_0 = -1$

3 ~ $f(x) = \sin(2x)$ et $x_0 = 0$

CORRECTION

f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

l : Le nombre dérivé de f en x_0.

On écrit : $f'(x_0) = l$

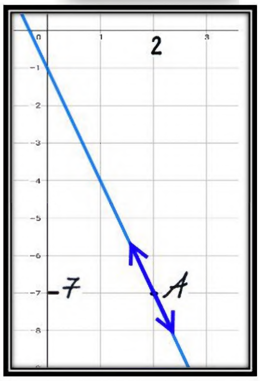
1 ~
$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-3x - 1 + 7}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-3x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-3(x-2)}{x - 2} = -3$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et on a :

$f'(2) = -3$

$f(2) = -7$ $\quad f'(2) = -3$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(2;-7)$ est : (T) :
$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) - 7 = -3x + 6 - 7 = -3x - 1$$



2
$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 4x + 1 - 7}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x-6)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (2x - 6) = -8$$

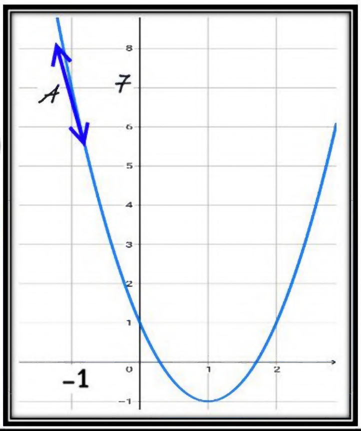
Ici, si on remplace x par -1, on trouve la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x+1)$, puis réduire par $(x+1)$

Donc f est dérivable en $x_0=-1$ et on a :

$f'(-1)=-8$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(-1;7)$ est : (T) : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$=-8(x+1)+7$$
$$=-8x-8+7$$
$$=-8x-1$$



3 ~ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\times\frac{\sin(2x)}{2x}$$
$$=2\times 1$$
$$=2$$

f est dérivable en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$

l : Le nombre dérivé de f en x_0.

On écrit : $f'(x_0)=l$

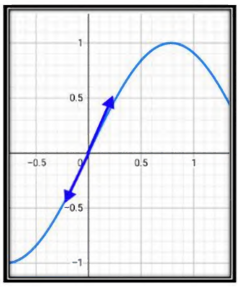
Donc f est dérivable en $x_0=0$ et on a :

$f'(0)=2$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $O(0,0)$ est : (T) : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$=2x+0$$
$$(T): y=2x$$



EXERCICE 2

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, puis donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 dans chacun des cas suivants :

1 ~ $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$ et $x_0=1$

2 ~ $f(x)=\sqrt[3]{3+2x}$ et $x_0=-1$

3 ~ $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}$ et $x_0=0$

CORRECTION

$\boxed{1}$ ~ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+2-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)}{\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\dfrac{3}{4}$

Si on remplace x par 0, on trouve la forme "$\frac{0}{0}$"

$\frac{0}{0}$ et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

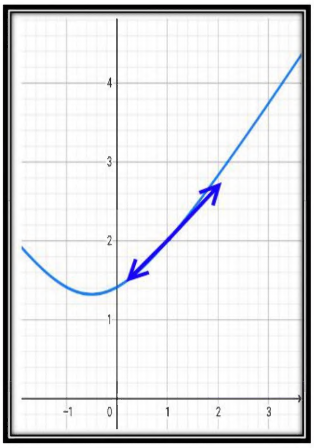
Donc f est dérivable en $x_0=1$ et on a : $f'(1)=\dfrac{3}{4}$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(1;2)$ est : (T): $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=\dfrac{3}{4}(x-1)+2$

$=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}+2$

(T): $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$



$\boxed{2}$ ~ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{3+2x}-1}{x+1}$

f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$

ℓ : Le nombre dérivé de f en x_0.

On écrit : $f'(x_0)=\ell$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{3+2x}-1\right)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+1.\sqrt[3]{3+2x}+1^2\right)}{(x+1)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+1.\sqrt[3]{3+2x}+1^2\right)}$$

Si on remplace x par 0, on trouve la forme "$\frac{0}{0}$"

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{3+2x}\right)^3-1^3}{(x+1)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+\sqrt[3]{3+2x}+1\right)}$$

ASTUCES

$\frac{0}{0}$ et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3+2x-1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+\sqrt[3]{3+2x}+1\right)}$$

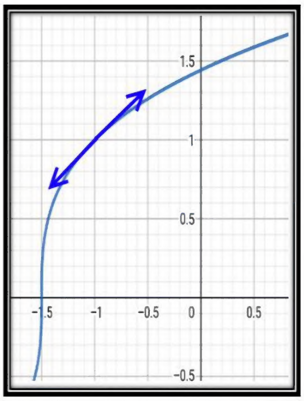
$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{(x+1)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+\sqrt[3]{3+2x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+\sqrt[3]{3+2x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{3+2x}^{\,2}+\sqrt[3]{3+2x}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{3}$$

Donc f est dérivable en $x_0=-1$ et on a : $f'(-1)=\frac{2}{3}$



Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(-1;1)$ est : $(T): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$=\frac{2}{3}(x+1)+1$$

$$=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+1$$

$$(T):\ y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

3 ~ $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

Il faut séparer $\sqrt{\ }$ et $\sqrt[3]{\ }$

En remarquant que :

$\sqrt[3]{x^2-x+2}\to 2$

$\sqrt{x+3}\to 1$

puis multiplier chacun par son conjugué.

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2+\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2}{x+2}+\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,3}-2^3}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+2^2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2-x+2-8}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right)} + \frac{\sqrt{x+3}^{\,2}-1^2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right)} + \frac{x+3-1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right)} + \frac{(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{\left(\sqrt[3]{x^2-x+2}^{\,2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right)} + \frac{1}{(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$= \frac{-5}{12} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{12}$$

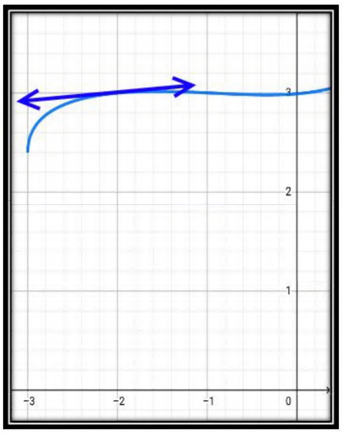
Donc f est dérivable en $x_0=1$ et on a : $f'(-2)=\frac{1}{12}$

Une équation cartésienne de la tangente (T) au point $A(-2;3)$ est : $(T): y = f'(-2)(x+2)+f(2)$

$$= \frac{1}{12}(x+2)+3$$

$$= \frac{1}{12}x+\frac{1}{6}+3$$

$$(T): y = \frac{1}{12}x+\frac{19}{6}$$



EXERCICE 3

Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les deux cas suivants, puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

1. $f(x)=|x|$ et $x_0=0$
2. $f(x)=|x-2|$ et $x_0=2$

CORRECTION

1. Ici, on a $x \to 0$, ce qui entraîne : $|x| \to 0$

Dans ce cas, il faut distinguer les deux cas :

- $x \to 0^+ \Rightarrow |x| = x$
- $x \to 0^- \Rightarrow |x| = -x$

La dérivabilite de f en $x_0=0$ à droite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}$$
$$=1$$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à droite et on a : $f'_d(0)=1$

La dérivabilite de f en $x_0=0$ à gauche

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}$$
$$=-1$$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à gauche et on a : $f'_g(0)=-1$

Puisque $f'_g(0)\neq f'_d(0)$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0=0$

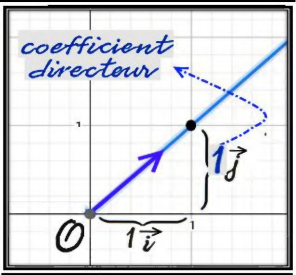
Interprétation graphique

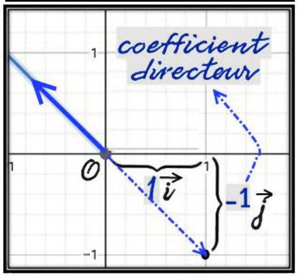
Interprétation graphique

Il faut juste dire l'influence d'un résultat analytique à la courbe.

(C_f) admet deux demi-tangentes au point $O(0,0)$

- Une demi-tangente à droite du point $O(0,0)$ coefficient directeur égale à 1
- Une demi-tangente à gauche du point $O(0,0)$ coefficient directeur égale à -1





Remarque

Le point O est appelé : **Point anguleux**

(2) ~ $f(x)=|x-2|$; $x_0=2$

Ici, on a $x\to 2$, ce qui entraîne : $|x-2|\to 0$

Dans ce cas, il faut distinguer les deux cas :

- $x\to 2^+ \Rightarrow |x-2|=x-2$
- $x\to 2^- \Rightarrow |x-2|=-(x-2)$

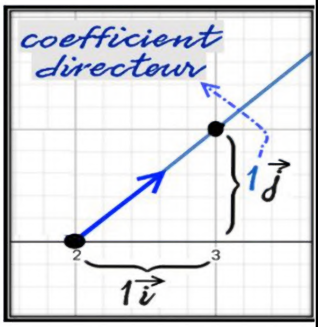
La dérivabilite de f en $x_0=2$ à droite

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}$$
$$=1$$

Donc f est dérivable en $x_0=2$ à droite et on a : $f'_d(2)=1$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente à droite du point $A(2;0)$ coefficient directeur égal à 1



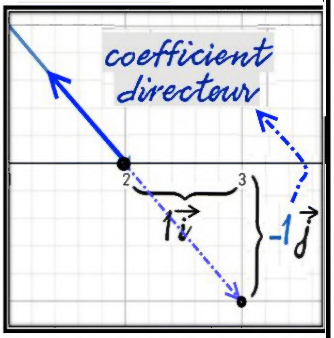
La dérivabilite de f en $x_0=2$ à gauche

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}$$
$$=-1$$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à gauche et on a : $f'_g(2)=-1$

Interprétation graphique

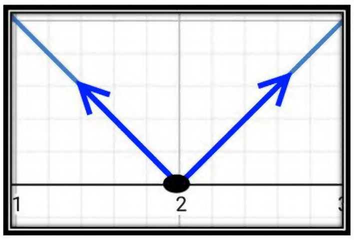
(C_f) admet une demi-tangente à gauche du point $A(2;0)$ coefficient directeur égal à -1



Conclusion

Puisque $f'_g(0)\neq f'_d(0)$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0=0$



EXERCICE 4

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les deux cas suivants, puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

1 ~ $f(x)=\sqrt{x-1}$; $x_0=1$ à droite

2 ~ $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$; $x_0=-1$ à gauche

CORRECTION

1 ~ $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

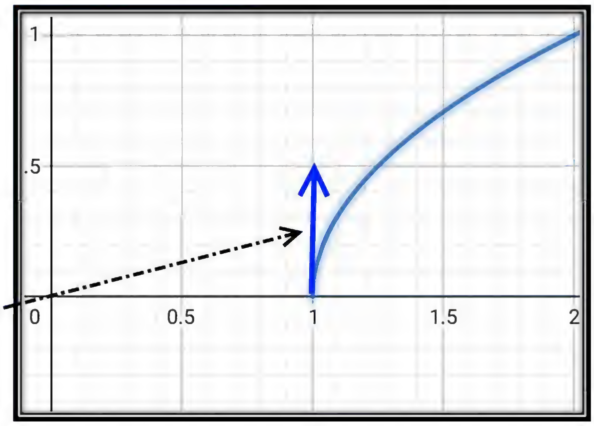
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$

$$=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à droite

Interprétation graphique



(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,0)$ (Dirigeé vers le haut)

$$\lim_{x\to1^+}\cdots=+\infty$$

$\boxed{+}\times\boxed{+}=\boxed{+}$

2 ~ $$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-0}{x+1}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x+1}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}\,\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2}}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2}}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}^{\,3}}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2}}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2}}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-1)}{\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2}}$$

$$= -\infty$$

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a}^2$

$\frac{-2}{0^+} = -\infty$

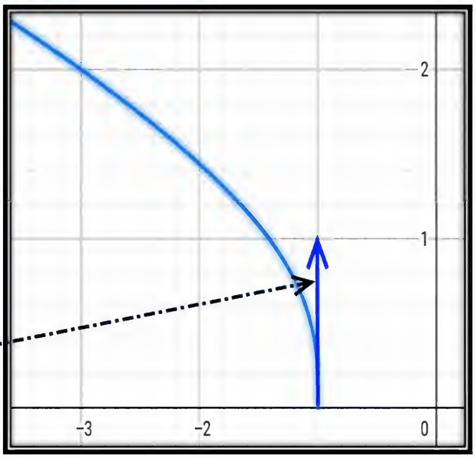
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$ à gauche

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,0)$ (Dirigée vers le haut)

$\lim_{x \to -1^-} \cdots = -\infty$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$



EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 3 \; ; \; x \leqslant 1 \\ f(x) = \sqrt{3x+1} - x \; ; \; x > 1 \end{cases}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f
2. Montrer que f est continue en $x_0 = 1$
3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

1. Déterminons D_f

Notons : $\begin{cases} f_1(x) = f(x) \; ; x \leqslant 1 \\ f_2(x) = f(x) \; ; x > 1 \end{cases}$

On aura donc $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$x \in D_{f_1} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R})$ et $x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow x \leqslant 1$

Donc $\boxed{D_{f_1} =]-\infty ; 1]}$

$f(x) = \underbrace{x^2-3x+3}$; $\underbrace{x \leqslant 1}$

$x \in D_{f_2} \Leftrightarrow 3x+1 \geqslant 0$ et $x > 1$

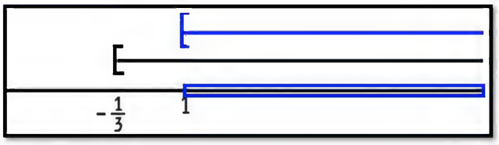
$f(x) = \sqrt{\underbrace{3x+1}} - x$; $\underbrace{x>1}$

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 3x \geqslant -1$ et $x > 1$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{3}$ et $x > 1$

$\Leftrightarrow x > 1$



Donc $\boxed{D_{f_2} =]1 ; +\infty[}$

On a : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$=]-\infty ; 1] \cup]1 ; +\infty[$

D'où : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2 ~ Montrons que f est continue en $x_0 = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2-3x+3 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{3x+1} - x = 1$
- $f(1) = 1^2 - 3.1 + 3 = 1$

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0

Puisque : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0 = 1$

3 ~ La dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à droite

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - x - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2 + 2 - x + 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} + \frac{-x+1}{x-1}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} + \frac{-(x-1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}-1$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}-1$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}-1$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}-1$$
$$=\frac{3}{4}-1$$
$$=-\frac{1}{4}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $\sqrt{3x+1}\to 2$, ça sera mieux de soustraire 2 et de l'ajouter puis séparer les limites

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à droite et on a : $f'_d(1)=-\frac{1}{4}$

La dérivabilite de f en $x_0=1$ à gauche

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}(x-2)$$
$$=-1$$

Ici, si on remplace x par -2 on trouve la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-1)$, puis réduire par $(x-1)$.

Si $x_0\neq 0$ est une racine de ax^2+bx+c, alors $ax^2+bx+c=(x-x_0)\left(ax-\frac{c}{x_0}\right)$

Donc f est dérivable en $x_0=0$ à gauche et on a : $f'_g(1)=-1$

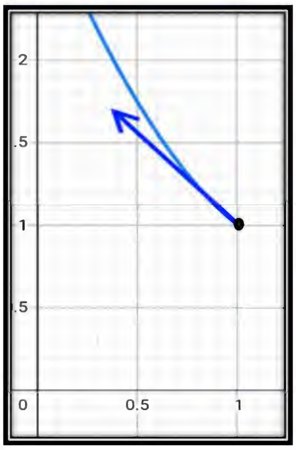
Conclusion

Puisque $f'_g(1)\neq f'_d(1)$

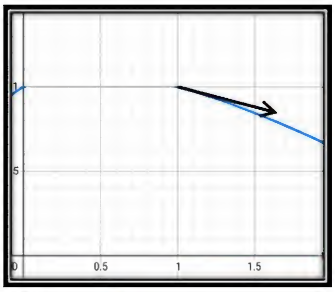
Alors f n'est pas dérivable en $x_0=1$

Interprétation graphique

- (C_f) admet une demi-tangente à gauche du point $A(1;1)$ coefficient directeur égal à $-\frac{1}{4}$

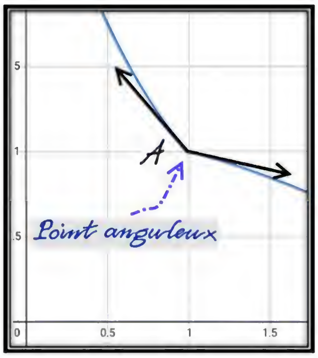


☞ (C_f) admet une demi-tangente à droite du point $A(1;1)$ coefficient directeur égal à $-\frac{1}{4}$



Remarque

Le point A est appelé :
Point anguleux



EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 ~ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

2 ~ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

1 ~ Montrons que f est continue en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \times (2x)^2}{x \times \dfrac{\sin(x)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}}{\dfrac{\sin(x)}{x}} \times \frac{4x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}}{\dfrac{\sin(x)}{x}} \times 4x$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminer "$\frac{0}{0}$"
Et puisqu'on a $\cos(0)$ et $\sin(0)$
Alors, il faut juste penser à

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} \times 4 \times 0$$
$$= 0$$

Puisque $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Alors f est continue en $x_0 = 0$

> f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2 La dérivabilite de f en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(x)} - 0}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \times (2x)^2}{x \times x \times \frac{\sin(x)}{x}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} \times \frac{4x^2}{x^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} \times 4$$
$$= \frac{1}{2} \times 4$$
$$= 2$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et on a :

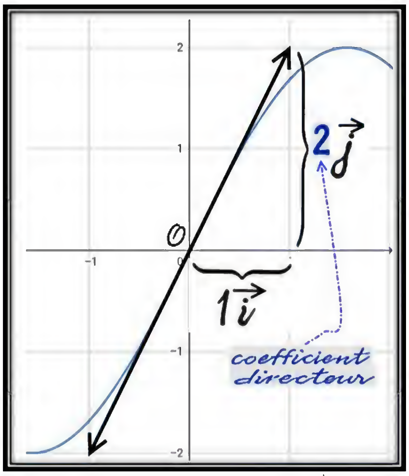
$f'(0) = 2$

> f est dérivable en x_0 si et seulement si :
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$
> ℓ : Le nombre dérivé de f en x_0.
> On écrit : $f'(x_0) = \ell$

> Si on remplace, on trouve la forme indéterminer "$\frac{0}{0}$"
> Et puisqu'on a $\cos(0)$ et $\sin(0)$
> Alors, il faut juste penser à
> $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$
> $$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Interprétation graphique

(C_f) admet une tangente au point $O(0,0)$ coefficient directeur égal à 2



EXERCICE 7

On considère la fonction f définie par :

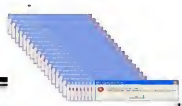
$$\boxed{f(x)=x-1-\sqrt{x^2-2x}}$$

1 ~ Déterminer D_f le domaine de définition de f

2 ~ Étudier la dérivabilité de f à droite de 2 et a gauche de 0, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus

CORRECTION

1 ~ Déterminons D_f



Si $x(x-2)\geqslant 0$
Alors $x\geqslant 0$ ou $x-2\geqslant 0$

$$x\in D_f \iff x^2-2x\geqslant 0$$
$$\iff x(x-2)\geqslant 0$$

Etudions le signe de $x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$\boxed{+}$	0	$-$	0	$\boxed{+}$	

Pour étudier le signe de $x(x-2)\geqslant 0$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

Donc : $\boxed{D_f=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[}$

2 ~ La dérivabilite de f en $x_0=2$ à droite

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1-\sqrt{x^2-2x}-1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}1-\frac{\sqrt{x^2-2x}\,\sqrt{x^2-2x}}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 2^+} 1 - \frac{x^2 - 2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} 1 - \frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite

Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $x - 2 \to 0$ et $\sqrt{x^2-2x} \to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

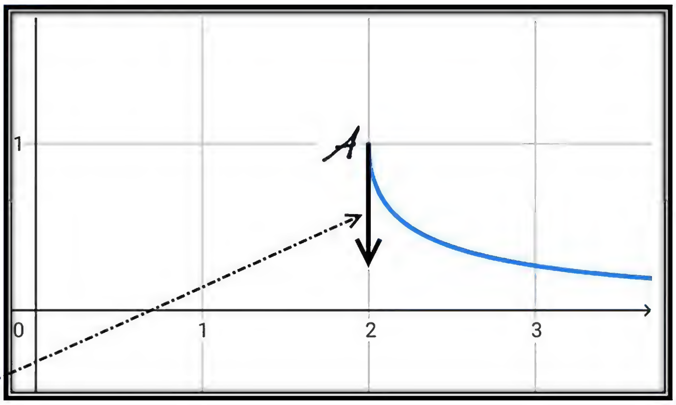
$$1 - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(2,1)$ (Dirigeé vers le bas)

$$\lim_{x \to 2^+} \cdots = -\infty$$

$$\boxed{+} \times \boxed{-} = \boxed{-}$$



La dérivabilite de f en $x_0 = 0$ à gauche

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 1 - \sqrt{x^2-2x} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2-2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{\sqrt{x^2-2x}\,\sqrt{x^2-2x}}{x\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{x^2 - 2x}{x\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{x(x-2)}{x\sqrt{x^2-2x}}$$

Pour étudier la dérivabilite de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$= \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}$$
$$= +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ à gauche

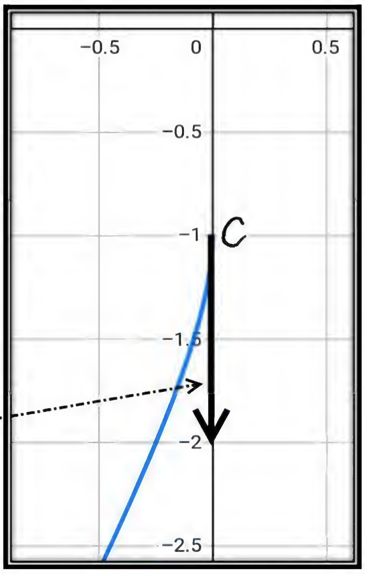
Mais, en remarquant que $x \to 0$ et $\sqrt{x^2-2x} \to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $C(0,-1)$ (Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x \to 0^-} \cdots = +\infty$$

$$\boxed{-} \times \boxed{+} = \boxed{-}$$



EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par :

$$\boxed{f(x) = x - \sqrt[3]{2-x}}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche de 2, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

1. Déterminons D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -x \geqslant -2$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant 2$$

Donc : $\boxed{D_f =]-\infty ; 2]}$

2. La dérivabilite de f en $x_0 = 2$ à gauche

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-\sqrt[3]{2-x}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}-\frac{\sqrt[3]{2-x}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}1-\frac{\sqrt[3]{2-x}\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}1-\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}1-\frac{2-x}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}1+\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}1+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}$$

$=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=0$ à gauche

Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à gauche du point $A(2,2)$ (Dirigeé vers le bas)

$$\lim_{x\to 2^-}\cdots=+\infty$$

$$\boxed{-}\times\boxed{+}=\boxed{-}$$

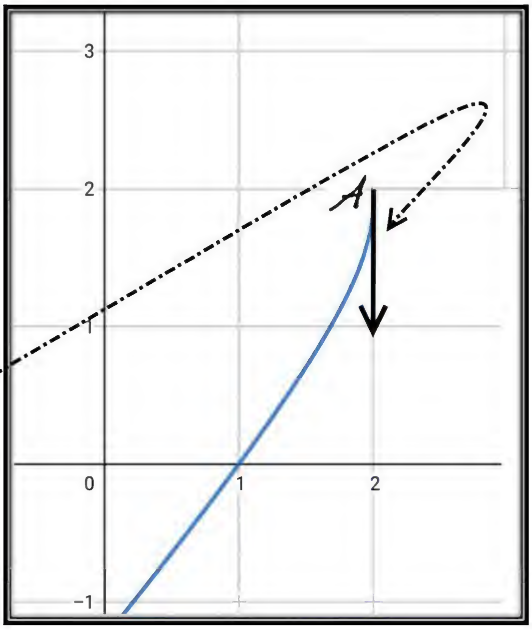
Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Mais, en remarquant que $x-2\to 0$ et $\sqrt[3]{2-x}\to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a}^2$



EXERCICE 9

On considère la fonction f définie par :

$\boxed{f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

1 ∼ Déterminer D_f le domaine de définition de f

2 ∼ Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

1 ∼ Déterminons D_f

$\sqrt[n]{u(x)}$ ------------> $u(x)\geqslant 0$

$x\in D_f \Longleftrightarrow (x-1)^2\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow x\in\mathbb{R}$

car $(\forall x\in\mathbb{R});(x-1)^2\geqslant 0$

Donc : $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

2 ∼ La dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)}^{\,2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)}^{\,2}\ \sqrt[3]{(x-1)}}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)}^{\,3}}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$=+\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{a}$

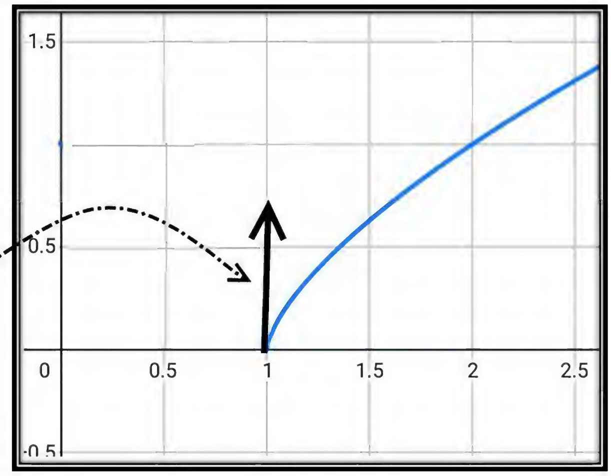
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite du point $A(1,0)$ (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \to 1^+} \cdots = +\infty$$

$\boxed{+} \times \boxed{+} = \boxed{+}$



La dérivabilite de f en $x_0 = 1$ à gauche

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - 0}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{-(1-x)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} -\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1-x)^3}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} -\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^3}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} -\sqrt[3]{\frac{1}{1-x}}$$

$$= -\infty$$

Pour étudier **la dérivabilité de f en x_0 à gauche**, il faut calculer la limite:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2}$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de **multiplier par le conjugué**

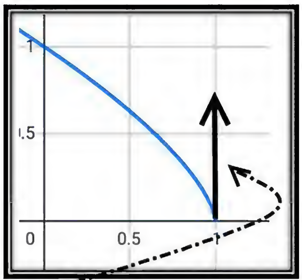
Le conjugué de $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{a}$

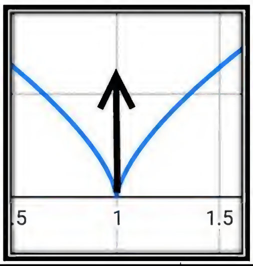
Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à gauche du point $A(1,0)$ (Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x \to 1^-} \cdots = -\infty$$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$





EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en $x_0=0$ à droite
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

CORRECTION

1. Montrer que f est continue en $x_0=0$ à droite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{x}\times x}{\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\times\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\times\frac{\sqrt[3]{x}^3}{\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\times\sqrt[3]{x}^2$$
$$=1\times 0$$
$$=0$$

> f est continue en x_0 à droite si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$

> Si on remplace, on trouve indéterminer « $\frac{0}{0}$ ». Et puisqu'on a $\sin(0)$. Alors, il faut juste penser à : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1}$

et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$

Alors f est continue en $x_0=0$ à droite

2. La dérivabilité de f en $x_0=0$ à droite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}}{x}$$

> Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= +\infty$$

car $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty}$

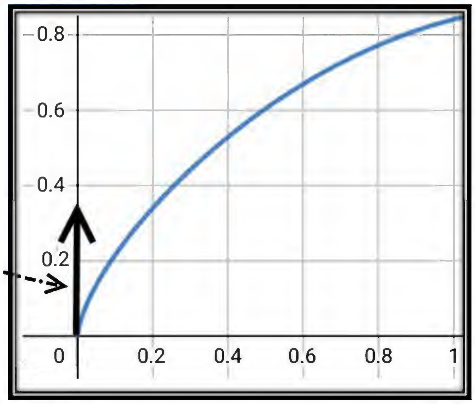
Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite du point $O(0,0)$ (Dirigeé vers le haut)

$$\lim_{x\to 0^+} \cdots = +\infty$$

$$\boxed{+} \times \boxed{+} = \boxed{+}$$



EXERCICE 11

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

1. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \frac{x^2}{4} - x + 10$
2. $f(x) = x(\sqrt{x} - 1)$
3. $f(x) = (5x+1)\cos(x)$
4. $f(x) = x^3 \sin^2(x)$

CORRECTION

$a' = 0$ $\quad (ax)' = a$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(ax^n)' = a n x^{n-1}$

1. $f'(x) = \left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \frac{x^2}{4} - x + 10\right)'$

$$= 5x^4 - 3.4x^3 + 2.3x^2 + \frac{1}{4}.2x - 1 + 0$$

D'où : $\boxed{f'(x) = 5x^4 - 3.4x^3 + 2.3x^2 + \frac{1}{4}.2x - 1 + 0}$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $f'(x) = (x(\sqrt{x} - 1))'$

$$= x'(\sqrt{x} - 1) + x(\sqrt{x} - 1)'$$

$$= 1(\sqrt{x} - 1) + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0\right)$$

$$= \sqrt{x} - 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x}}{2}$$

D'où : $\boxed{f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{2}}$

$\boxed{(u.v)' = u'.v + u.v'}$ $\boxed{(ax)' = a}$ $\boxed{(\cos(x))' = -\sin(x)}$

3 ~ $f'(x) = \left((5x+1)\cos(x)\right)'$

$$= (5x+1)'\cos(x) + (5x+1)(\cos(x))'$$

$$= 5\cos(x) - (5x+1)\sin(x)$$

D'où : $\boxed{f'(x) = 5\cos(x) - (5x+1)\sin(x)}$

$\boxed{(u.v)' = u'.v + u.v'}$ $\boxed{(u^n)' = n.u'.u^{n-1}}$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ $\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$

4 ~ $f'(x) = \left(x^3 \sin^2(x)\right)'$

$$= (x^3)'\sin^2(x) + x^3(\sin^2(x))'$$

$$= 3x^2\sin^2(x) + x^3.2(\sin(x))'(\sin(x))$$

$$= 3x^2\sin^2(x) + x^3.2\cos(x)\sin(x)$$

$$= x^2\left(3\sin(x) + 2x\cos(x)\right)\sin(x)$$

D'où : $\boxed{f'(x) = x^2\left(3\sin(x) + 2x\cos(x)\right)\sin(x)}$

EXERCICE 12

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

1 ~ $f(x) = \frac{1}{x-1}$

2 ~ $f(x) = \frac{3}{2x^2-1}$

3 ~ $f(x) = \frac{3x-1}{4x^2+1}$

4 ~ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

CORRECTION

$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$ $\boxed{(ax)' = a}$ $\boxed{a' = 0}$

1 ~ $f'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)$

$$= -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}$$

D'où : $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}}$

$\boxed{(k.u)' = k.u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

2 ~ $f'(x) = \left(\frac{3}{2x^2-1}\right)'$

$$= 3\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)'$$

$$= 3\,\frac{-(2x^2-1)'}{(2x^2-1)^2}$$
$$= 3\,\frac{-4x}{(2x^2-1)^2}$$
$$= -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}$$

D'où : $\boxed{f'(x) = -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}}$

3 ~ $f'(x) = \left(\frac{3x-1}{4x^2+1}\right)'$

$$= \frac{(3x-1)'(4x^2+1)-(4x^2+1)'(3x-1)}{(4x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3(4x^2+1)-8x(3x-1)}{(4x^2+1)^2}$$
$$= \frac{12x^2-24x^2+8x}{(4x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-12x^2+8x}{(4x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x(2-3x)}{(4x^2+1)^2}$$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

$\boxed{(ax)' = a}$ $\boxed{a' = 0}$

$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

D'où : $\boxed{f'(x) = \frac{4x(2-3x)}{(4x^2+1)^2}}$

4 ~ $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)'$

$$= \frac{(\sin(x))'.x - x'\sin(x)}{x^2}$$
$$= \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

$\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$ $\boxed{(ax)' = a}$

D'où : $\boxed{f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}}$

EXERCICE 13

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

1 ~ $f(x)=\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^3$

2 ~ $f(x)=\left(2\sqrt{x}-1\right)^5$

3 ~ $f(x)=\sqrt{3x^2+4x+3}$

4 ~ $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

CORRECTION

$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

$\boxed{a'=0}$ $\boxed{(ax)'=a}$

1 ~ $f'(x)=\left(\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^3\right)'$

$$=3\left(\frac{2x}{3x+1}\right)'\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2$$

$$=3\times\frac{(2x)'(3x+1)-(3x+1)'(2x)}{(3x+1)^2}\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2$$

$$=3\times\frac{2(3x+1)-3(2x)}{(3x+1)^2}\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2$$

$$=3\times\frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2$$

$$=3\times\frac{2}{(3x+1)^2}\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\frac{6}{(3x+1)^2}\times\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^2}$

$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$

$\boxed{(k\,u)'=k.u' \text{ tel que } k\in\mathbb{R}}$

$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\boxed{a'=0}$

2 ~ $f'(x)=\left((2\sqrt{x}-1)^5\right)'$

$$=5\,(2\sqrt{x}-1)'\times(2\sqrt{x}-1)^4$$

$$=5\times2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(2\sqrt{x}-1)^4$$

$$=\frac{5}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x}-1)^4$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x}-1)^4}$

$\boxed{3}$ ~ $f'(x)=\left(\sqrt{3x^2+4x+3}\right)'$

$$=\frac{(3x^2+4x+3)'}{2\sqrt{3x^2+4x+3}}$$

$$=\frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4\ \ +3}}$$

$$=\frac{2(3x+2)}{2\sqrt{3x^2+4x+3}}$$

$$=\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+3}}$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+3}}}$

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$ $\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{a'=0}$

$\boxed{4}$ ~ $f'(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}\right)'$

$$=\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)'(x-1)-(x-1)'\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{(x-2)'}{2\sqrt{x-2}}\times(x-1)-\sqrt{x-2}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\times(x-1)-\sqrt{x-2}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-2}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x-1-2\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-2(x-2)}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}$$

$$=\frac{x-1-2x+4}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\dfrac{3-x}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}}$

$\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$ $\boxed{a'=0}$

$\boxed{(ax)'=a}$

EXERCICE 14

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

1 ~ $f(x)=\sin(x^2-x+1)$

2 ~ $f(x)=\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}$

3 ~ $f(x)=\cos(\sin(x))$

4 ~ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

CORRECTION

1 ~ $f'(x)=\left(\sin(x^2-x+1)\right)'$

$=(x^2-x+1)'\times\sin'(x^2-x+1)$

$=(2x-1)\times\cos(x^2-x+1)$

$(\sin(u))'=u'.\cos(u)$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $\quad(ax)'=a$

$a'=0$

D'où : $\boxed{f'(x)=(2x-1)\times\cos(x^2-x+1)}$

2 ~ $f'(x)=\left(\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}\right)'$

$$=\frac{(\cos(\sqrt{x}-1))'}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}$$

$$=\frac{-(\sqrt{x}-1)'\times\sin(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}$$

$$=\frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-0\right)\sin(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}$$

$$=\frac{-\sin(\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}$$

$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\cos(u))'=-u'.\sin(u)$

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad a'=0$

D'où : $\boxed{f'(x)=\dfrac{-\sin(\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos(\sqrt{x}-1)}}}$

$\boxed{3}$ ~ $f'(x)=\left(\cos\left(\sin(x)\right)\right)'$

$$=\left(\sin(x)\right)'.\cos'\left(\sin(x)\right)$$

$$=\cos(x)\cdot\left(-\sin\left(\sin(x)\right)\right)$$

$$=-\cos(x)\cdot\sin\left(\sin(x)\right)$$

D'où : $\boxed{f'(x)=-\cos(x)\cdot\sin\left(\sin(x)\right)}$

$\boxed{\left(v\circ u(x)\right)'=u'(x)\times v'\left(u(x)\right)}$

$\boxed{\left(\cos(x)\right)'=-\sin(x)}$

$\boxed{4}$ ~ $f'(x)=\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\right)'$

$$=\frac{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$=\frac{\frac{(x-2)'(x-1)-(x-1)'(x-2)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$=\frac{\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

$$=\frac{x-1-x+2}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}}$

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{a'=0}$

EXERCICE 15

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$\boxed{1}$ ~ $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

$\boxed{2}$ ~ $f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{3}$ ~ $f(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^{\frac{3}{4}}$

CORRECTION

$$\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$ $$a'=0$$ $$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

1 ~ $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'$

$$=\frac{(x^2+1)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\frac{2x}{3\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}}$

$$(u.v)'=u'.v+u.v'$$ $$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

2 ~ $f'(x)=\left((x^2+1)^{\frac14}\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$=\left((x^2+1)^{\frac14}\right)'\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)^{\frac14}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac14-1}\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)^{\frac14}\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{4}\times 2x\,(x^2+1)^{\frac{-3}{4}}\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)^{\frac14}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(u^r\right)'=r.u'.u^{r-1}$$ $$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$=\frac{x}{2}(x^2+1)^{\frac{-3}{4}}\times(x^2+1)^{\frac12}+(x^2+1)^{\frac14}\times\frac{x}{(x^2+1)^{\frac12}}$$

$$=\frac{x}{2}(x^2+1)^{\frac{-3}{4}+\frac12}+x\,(x^2+1)^{\frac14-\frac12}$$

$$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$$

$$=\frac{x}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{4}}+x(x^2+1)^{\frac{-1}{4}}$$

$$\frac{1}{a^r}=a^{-r}$$

$$=x(x^2+1)^{\frac{-1}{4}}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{3}{2}x\,(x^2+1)^{\frac{-1}{4}}$$

$$=\frac{3x}{2(x^2+1)^{\frac14}}$$

D'où : $\boxed{f'(x)=\frac{3x}{2\sqrt[4]{x^2+1}}}$

3 ~ $f'(x)=\left(\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^{\frac34}\right)'$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^{\frac34-1}$$

$$\left(u^r\right)'=r.u'.u^{r-1}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{(2x-1)'(x-1)-(x-1)'(2x-1)}{(x-1)^2}\times\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{-1}{(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}$$

$$= \frac{-3}{4(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}$$

D'où : $\boxed{f'(x) = \frac{-3}{4(x-1)^2} \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}}}$

EXERCICE 16

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x}$

CORRECTION

Rappel

Si f est dérivable en un point x_0

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2-4x+1$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 6x-4$

On a f est dérivable en $x_0 = 1$ et : $f'(1) = 6(1)-4 = 2$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

Et par suite : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1} = 2$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \cos(x)$

On a f est dérivable en $x_0 = 0$ et : $f'(0) = \cos(0) = 1$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

$\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$

Et par suite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

$\boxed{3}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos^2(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$$

$$\boxed{(\cos(x))'=-\sin(x)}$$

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos^2(x))' \\ &= ((\cos(x))^2)' \\ &= 2(\cos(x))'(\cos(x)) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) \\ &= -\sin(2x) \end{aligned}$$

On a f est dérivable en $x_0=0$ et : $f'(0)=-\sin(2.0)=-\sin 0=0$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

Et par suite : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2(x)-1}{x}=0$

EXERCICE 17

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x-a}$ $\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}+x-3}{x-1}$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{\tan(x)-1}$

CORRECTION

Rappel

Si f est dérivable en un point x_0

Alors $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

$\boxed{1}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$$

$$\boxed{(\sin(x))'=\cos(x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2(x))' \\ &= ((\sin(x))^2)' \\ &= 2(\sin(x))'(\sin(x)) \end{aligned}$$

$= 2\cos(x)\sin(x)$

$= \sin(2x)$

$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$

On a f est dérivable en $x_0 = a$ et : $f'(a) = \sin(2a)$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Et par suite : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x - a} = \sin(2a)$

2- Soit f la fonction définie sur $]-7;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x+7} + x$

On a f est dérivable sur $]-7;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x+7} + x\right)'$$
$$= \left(\sqrt[3]{x+7}\right)' + x'$$
$$= \frac{(x+7)'}{3\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2} + 1$$
$$= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2} + 1$$

$\boxed{\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}}$

$\boxed{(ax)' = a}$ $\boxed{a' = 0}$

On a f est dérivable en $x_0 = 1$ et : $f'(1) = \dfrac{1}{3 \times 4} + 1 = \dfrac{13}{12}$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

Et par suite : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7} + x - 3}{x - 1} = \dfrac{13}{12}$

3-

On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\tan(x) - 1} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}}$

Soit f la fonction définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = 2\sin(x)$

$\boxed{(k.u)' = k.u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{(\sin(x))' = \cos(x)}$

On a f est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et :

$f'(x) = (2\sin(x))' = 2\cos(x)$

On a f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et : $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}}$

Et par suite : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

Soit g la fonction définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x)=\tan(x)$

On a f est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et : $f'(x)=1+\tan^2(x)$

On a f est dérivable en $x_0=\frac{\pi}{4}$ et : $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ $\boxed{g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1}$

Et par suite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}=2$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{\tan(x)-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 17

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

1. $f(x)=2x-1$ et $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=5x^3-6x^2+3x-5$ et $I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ et $I=]0;+\infty[$

CORRECTION

Remarque

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I
- Si $f(x)=F'(x)$
  Alors F est une primitive de f
- Il faut pas dire la primitive. Car si F est une primitive de f
  Alors : $x\longmapsto F(x)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$ est aussi primitive de f

1. $f(x)=2x-1$

$=\left(2\times\frac{1}{2}x^2-x\right)'$

$=\left(x^2-x\right)'$

$\boxed{a=(ax)'}$

$\boxed{x=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'}$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto x^2 - x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Il faut pas oublier la constante c

2 ~ $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 5$

$$= \left(5 \times \frac{1}{4}x^4 - 6 \times \frac{1}{3}x^3 + 3 \times \frac{1}{2}x^2 - 5x\right)'$$

$$= \left(\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x\right)'$$

$ax^n = \left(a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)'$; $a = (ax)'$; $x = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F: x \mapsto \frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c \;/ c \in \mathbb{R}$

3 ~ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

$$= \left(2\sqrt{x} + \frac{-1}{x} - \frac{-1}{2x^2}\right)'$$

$$= \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)'$$

$\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$; $\frac{1}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})'$; $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right)'$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $F: x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c \;/ c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

1 ~ $f(x) = \tan^2 x + \cos x + \sin x$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

2 ~ $f(x) = 4x(x^2-1)^{2016}$ et $I = \mathbb{R}$

3 ~ $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^3(x)$ et $I = \mathbb{R}$

CORRECTION

1 ~ $f(x) = \tan^2 x + \cos x + \sin x$

$$= -1 + (1 + \tan^2 x) + (\sin x)' + (-\cos x)'$$

$$= (-x)' + (\tan x)' + (\sin x)' + (-\cos x)'$$

$$= (-x + \tan x + \sin x - \cos x)'$$

$\cos x = (\sin x)'$; $\sin x = (-\cos x)'$; $1 + \tan^2 x = (\tan x)'$; $a = (ax)'$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur I par : $F: x \mapsto -x + \tan x + \sin x - \cos x + c \;/ c \in \mathbb{R}$

2 ~ $f(x)=4x(x^2-1)^{2016}$

$$=2(x^2-1)'(x^2-1)^{2016}$$

$$=2\left(\frac{(x^2-1)^{2017}}{2017}\right)'$$

Ici, on a le produit de deux fonctions, donc, au début, il faut penser à $u'.u^n$

On a : $(x^2-1)'=2x$

Donc : $4x=2.2x=2(x^2-1)'$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'.u^n=\left(\frac{1}{n+1}.u^{n+1}\right)'$$

$$F:x\longmapsto 2\frac{(x^2-1)^{2017}}{2017}+c \ /c\in\mathbb{R}$$

3 ~ $f(x)=\cos(x).\sin^3(x)$

$$=(\sin x)'(\sin x)^3$$

$$=\frac{1}{4}\left((\sin x)^4\right)'$$

On remplace $\cos(x)$ par $(\sin x)'$

Et on pense à $u'u^n$.

$$u'u^n=\left(\frac{1}{n+1}.u^{n+1}\right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F:x\longmapsto\frac{1}{4}\sin^4(x)+c/c\in\mathbb{R}$

EXERCICE 19

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

1 ~ $f(x)=\dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)^2}$ et $I=\mathbb{R}$

2 ~ $f(x)=\dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)^3}$ et $I=\mathbb{R}$

3 ~ $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}$ et $I=\mathbb{R}$

CORRECTION

1 ~ $f(x)=\dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)^2}$

$$=\frac{(2x^2+x+3)'}{(2x^2+x+3)^2}$$

$$=\left(-\frac{1}{2x^2+x+3}\right)'$$

On a le dénominateur est de la forme u^2

En première étape, il faut penser à $\frac{u'}{u^2}=\left(-\frac{1}{u}\right)'$

$$\frac{u'}{u^2}=\left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$(2x^2+x+3)'=4x+1$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2+x+3} + c \;/ c \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ ~ $f(x) = \dfrac{4x+1}{(2x^2+x+3)^3}$

$$= (4x+1)(2x^2+x+3)^{-3}$$
$$= (2x^2+x+3)'(2x^2+x+3)^{-3}$$
$$= \frac{1}{-3+1}\left((2x^2+x+3)^{-3+1}\right)'$$
$$= \frac{-1}{2}\left((2x^2+x+3)^{-2}\right)'$$
$$= \left(\frac{-1}{2(2x^2+x+3)^2}\right)'$$

Dans ce cas, on peut penser à $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n=3$ ou bien utiliser la règle $\dfrac{1}{a^r} = a^{-r}$, puis, on pense à $u'.u^r$

$$u'.u^r = \left(\frac{1}{r+1}.u^{r+1}\right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \mapsto -\dfrac{1}{2(2x^2+x+3)^2} + c / c \in \mathbb{R}$

$\boxed{3}$ ~ $f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}$

$$= (2x+1)(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (x^2+x+1)'(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}(x^2+x+1)^{1+\frac{1}{3}}\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{\frac{4}{3}}(x^2+x+1)^{\frac{4}{3}}\right)'$$
$$= \left(\frac{3}{4}\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)^3\right)'$$

On peut toujours utiliser la règle $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Puis on pense à $u'.u^r$ car la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n-1$

$$u'.u^r = \left(\frac{1}{r+1}.u^{r+1}\right)'$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \mapsto \dfrac{3}{4}\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)^3 + c / c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

1 ~ $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ et $I=]3;+\infty[$

2 ~ $f(x)=(x^2-x-1)\sqrt[3]{x}$ et $I=[0;+\infty[$

3 ~ $f(x)=\sqrt{x+3}$ et $I=[-3;+\infty[$

CORRECTION

1 ~
$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-3}}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2-2x-3)'}{\sqrt{x^2-2x-3}}\\ &=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{x^2-2x-3}\right)'\\ &=\left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)' \end{aligned}$$

Ici, on a le dénominateur est de la forme $\sqrt{u}$

En première étape, il faut penser à $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

Mais la dérivée de $u : x \mapsto x^2-2x-3$ et $u' : x \mapsto 2x-2$

Dans ce cas, on a le droit de multiplier par 2 et diviser par 2 pour avoir $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\boxed{\frac{u'}{\sqrt{u}}=\left(2\sqrt{u}\right)'}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $]3;+\infty[$ par : $F : x \mapsto \sqrt{x^2-2x-3}+c \,/\, c\in\mathbb{R}$

2 ~
$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-x-1)\sqrt[3]{x}\\ &=(x^2-x-1)\,x^{\frac{1}{3}}\\ &=x^{2+\frac{1}{3}}-x^{1+\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\\ &=x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\\ &=\left(\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}-\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}\right)'\\ &=\left(\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)'\\ &=\left(\frac{3}{10}\sqrt[3]{x^{10}}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^{7}}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^{4}}\right)' \end{aligned}$$

Dans ce cas, il suffit de développer pour avoir juste les fonctions du type : $x \mapsto x^r$

$$\boxed{x^r=\left(\frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}\right)'}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \longmapsto \frac{3}{10}\sqrt[3]{x^{10}} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

3 ~ $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$= (x+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (x+3)'(x+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+3)^{\frac{1}{2}+1}\right)'$$
$$= \left(\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right)'$$
$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}\right)'$$

Ici, on remplace $\sqrt{x+3}$ par $(x+3)^{\frac{1}{2}}$
Et de penser à $u'.u^r$ car u
de degré 1 et donc u' est un polynôme
de degré 0 (constante)

$$u'.u^r = \left(\frac{1}{r+1}.u^{r+1}\right)'$$

$$\sqrt{a}^m = a^{\frac{m}{2}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F : x \longmapsto \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

EXERCICE 21

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie sur l'intervalle I :

1 ~ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ et $I =]1;+\infty[$

2 ~ $f(x) = \sin^3(x)$ et $I = \mathbb{R}$

3 ~ $f(x) = x\sqrt[3]{x+3}$ et $I = [-3;+\infty[$

CORRECTION

1 ~ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$= \sqrt{x-1} + \frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}}$$
$$= (x-1)^{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{x-1})'$$

Ici, au début, on va penser à $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
Mais u est un polynôme de degé 1,
donc, il faut que u' soit de degré 0
Mais ici on a $\frac{v}{\sqrt{u}}$ avec u et v sont
de degé 1. Dans ce cas il faut écrire v
sous forme $v = au + b$
Et on aura : $\frac{v}{\sqrt{u}} = \frac{au}{\sqrt{u}} + \frac{b}{\sqrt{u}} = a\sqrt{u} + \frac{b}{\sqrt{u}}$

$$=(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}+(2\sqrt{x-1})'$$
$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}\right)'+(2\sqrt{x-1})'$$
$$=\left(\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'+(2\sqrt{x-1})'$$
$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x-1}^{3}+2\sqrt{x-1}\right)'$$

$$\boxed{\frac{u'}{\sqrt{u}}=(2\sqrt{u})'}$$

$$\boxed{u'.u^{r}=\left(\frac{1}{r+1}.u^{r+1}\right)'}$$

$$\sqrt{a}^{m}=a^{\frac{m}{2}}$$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F:x\longmapsto\frac{2}{3}\sqrt{x-1}^{3}+2\sqrt{x-1}+c\,/\,c\in\mathbb{R}$

2 ~ $f(x)=\sin^3(x)$
$$=\sin(x).\sin^2(x)$$
$$=\sin(x).(1-\cos^2(x))$$
$$=\sin(x)-\sin(x).\cos^2(x)$$
$$=(-\cos x)'+(\cos x)'.\cos^2(x)$$
$$=(-\cos x)'+\left(\frac{1}{3}\cos^3(x)\right)'$$
$$=\left(-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3(x)\right)'$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cos^3(x)-\cos x\right)'$$

En générale, pour déterminer une primitive de la fonction $f:x\longmapsto\sin^{p}(x).\cos^{q}(x)$, avec p ou q est impair

Supposons p est impair, donc $(\exists n\in\mathbb{N});p=2n+1$

$$f(x)=\sin^{2n+1}(x).\cos^{q}(x)$$
$$=\sin(x)\sin^{2n}(x).\cos^{q}(x)$$
$$=\sin(x)\left(\sin^{2}(x)\right)^{n}.\cos^{q}(x)$$
$$=\sin(x)\left(1-\cos^{2}(x)\right)^{n}.\cos^{q}(x)$$

Puis, on dévellope $(1-\cos^{2}(x))^{n}.\cos^{q}(x)$

On obtiendra la somme des fonctions de type : $x\longmapsto\sin(x)\cos^{r}(x)$, et on pense à $u'.u^{r}$

Donc les fonctions primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F:x\longmapsto\frac{1}{3}\cos^{3}(x)-\cos(x)+c\,/\,c\in\mathbb{R}$

3 ~ $f(x)=x\sqrt[3]{x+3}$
$$=x\sqrt[3]{x+3}$$
$$=x(x+3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(x+3-3)(x+3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(x+3)(x+3)^{\frac{1}{3}}-3(x+3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(x+3)^{\frac{1}{3}+1}-3(x+3)'(x+3)^{\frac{1}{3}}$$

Ici, au début, on va penser à $u'.u^{r}$

Mais u est un polynôme de degé 1, donc, il faut que u' soit de degré 0

Mais ici on a $v.u^{r}$ avec u et v sont de degé 1. Dans ce cas il faut écrire v sous forme $v=au+b$

Et on aura : $v.u^{r}=au\,u^{r}+bu^{r}$
$$=au^{r+1}+bu^{r}$$

$$=(x+3)'(x+3)^{\frac{4}{3}}-3\times\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\left((x+3)^{1+\frac{1}{3}}\right)'$$
$$=\frac{1}{1+\frac{4}{3}}\left((x+3)^{\frac{4}{3}+1}\right)'-3\times\frac{3}{4}\left((x+3)^{\frac{4}{3}}\right)$$
$$=\frac{3}{7}\left((x+3)^{\frac{7}{3}}\right)'-\frac{3}{4}\left((x+3)^{\frac{4}{3}}\right)'$$
$$=\left(\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+3)^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4}\right)'$$

$$u'.u^r=\left(\frac{1}{r+1}.u^{r+1}\right)'$$

$$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$$

EXERCICE 22

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f
2. Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe représentative de f

CORRECTION

1. Déterminons D_f

$$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq 1$$

D'où $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x)\neq 0$$

2.

(i) Soit $x\in D_f$

$$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$\Leftrightarrow x\neq 1$$
$$\Leftrightarrow -x\neq -1$$
$$\Leftrightarrow 2-x\neq 2-1$$
$$\Leftrightarrow 2-x\neq 1$$
$$\Leftrightarrow 2-x\in D_f$$

Donc $(\forall x\in D_f);\ 2-x\in D_f$

Pour montrer qu'un point $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_f), il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases}(i)\ (\forall x\in D_f);\ 2a-x\in D_f\\ (ii)\ (\forall x\in D_f);\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$$

Ici, on prend $a=1$ et $b=2$

Donc: $2a=2$ et $2b=4$

La condition (i) est importante car, on a pas le droit de calculer $f(2a-x)$ sauf si $2a-x\in D_f$

(ii) Soit $x\in D_f$

Montrons que $f(2-x)=4-f(x)$

On a $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$

Donc $f(2-x)=\dfrac{(2-x)^2-2}{(2-x)-1}$

$$f(\square)=\frac{\square^2-2}{\square-1}$$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2-2}{(2-x)-1}+\frac{x^2-2}{x-1}$$
$$=\frac{4-4x+x^2-2}{1-x}+\frac{x^2-2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-4x+2}{1-x}+\frac{x^2-2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-4x+2}{1-x}+\frac{x^2-2}{-(1-x)}$$
$$=\frac{x^2-4x+2}{1-x}+\frac{-x^2+2}{1-x}$$
$$=\frac{x^2-4x+2-x^2+2}{1-x}$$
$$=\frac{4-4x}{1-x}$$
$$=\frac{4(1-x)}{1-x}$$
$$=4$$

$$f(\bigcirc)=\frac{\bigcirc^2-2}{\bigcirc-1}$$

Pour la condition (ii), il suffit de calculer $f(2a-x)+f(x)$ et de trouver $2b$

Donc $f(2-x)+f(x)=4$

Autrement dit $f(2-x)=4-f(x)$

D'où le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de (C_f)

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f
2. Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe représentative de f

CORRECTION

1. Déterminons D_f

$x\in D_f \iff x^2-x-2\neq 0$

$\dfrac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x)\neq 0$

Soit le trinôme x^2-x-2

Son discriminant $\Delta=b^2-4ac=9$

Puisque $\Delta>0$

Alors le trinôme x^2-x-2 possède deux racines distinctes

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

et $$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$

$\boxed{2}$.

(i) Montrons que $(\forall x \in D_f); 1-x \in D_f$

Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow -x \neq 1 \text{ et } -x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow 1-x \neq 2 \text{ et } 1-x \neq -1 \end{aligned}$$

Donc $1-x \in D_f$

D'où $(\forall x \in D_f); 1-x \in D_f$

(ii) Soit $x \in D_f$

Montrons que $f(1-x) = 2 - f(x)$

On a $f(x) = 1 + \dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

Donc
$$\begin{aligned} f(1-x) &= 1 + \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2} \\ &= 1 + \frac{1-2+2x}{1-2x+x^2-1+x-2} \\ &= 1 + \frac{2x-1}{x^2-x-2} \end{aligned}$$

On a
$$\begin{aligned} f(1-x)+f(x) &= \left(1+\frac{2x-1}{x^2-x-2}\right) + \left(1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}\right) \\ &= 2 + \frac{2x-1+1-2x}{x^2-x-2} \\ &= 2+0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc $f(1-x)+f(x) = 2$

Donc $f\left(2\cdot\frac{1}{2}-x\right) = 2.1 - f(x)$

D'où le point $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Pour montrer qu'un point $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_f), il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases} (i)\ (\forall x \in D_f); 2a-x \in D_f \\ (ii)\ (\forall x \in D_f); f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Ici, on prend $a = \frac{1}{2}$ et $b=1$

Donc: $2a = 1$ et $2b = 2$

$$f(\bigcirc) = 1 + \frac{1-2\bigcirc}{\bigcirc^2-\bigcirc-2}$$

Pour la condition (ii), il suffit de calculer $f(2a-x)+f(x)$ et de trouver $2b$

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+3}$

$\boxed{1}$. Déterminer D_f, le domaine de définition de f

$\boxed{2}$. Montrer que la droite (Δ) dont l'équation $x=1$ est l'axe de symétrie de (C_f)

CORRECTION

$\boxed{1}$ Déterminons D_f

$x \in D_f \iff x^2-2x+3 \geq 0$

$\iff x^2-2x+1+2 \geq 0$

$\iff (x-1)^2+2 \geq 0$

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x) \geq 0$

Or, on sait que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-1)^2 \geq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-1)^2+2 \geq 2$ et $2>0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-1)^2+2>0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{2}$

Pour montrer que la droite (Δ) dont l'équation $x=\alpha$ est l'axe de symétrie de (C_f), il faut établir les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i)\ (\forall x \in D_f) ; 2\alpha - x \in D_f \\ (ii)\ (\forall x \in D_f) ; f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$$

(i) On a $D_f = \mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in D_f)$; $2-x \in D_f$

(ii) Soit $x \in D_f$

Montrons que $f(2-x)=f(x)$

Ici, on prend $\alpha=1$

Donc : $2\alpha=2$

On a : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$

Donc : $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-2(2-x)+3}$

$=\sqrt{4-4x+x^2-4+2x+3}$

$=\sqrt{x^2-2x+3}$

$=f(x)$

D'où la droite (Δ) dont l'équation $x=1$ est l'axe de symétrie de (C_f)

EXERCICE 25

Soit f la fonction définie par : $\boxed{f(x)=x-\sqrt{x}}$

Et (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

$\boxed{1}$ Déterminer D_f, le domaine de définition de f, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\boxed{2}$ Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$\boxed{3}$ Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner un interprétation géométrique au résultat obtenu.

$\boxed{4}$ a. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{4x-1}{2\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}+1)}$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

c. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=1$.

5. Représenter (C_f)

6. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]\frac{1}{4};+\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Calculer $g(4)$ et montrer que g^{-1} est dérivable en $x_0=2$ et déterminer $(g^{-1})'(2)$

c. Représenter $(C_{g^{-1}})$, la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

CORRECTION

1. Déterminons D_f

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x)\geqslant 0$

$x\in D_f \Longleftrightarrow x\geqslant 0$

Donc $D_f=[0;+\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Ici, si on remplace, on va trouver la F.I $+\infty-(+\infty)$
Le plus puissant est x
Donc, il suffit de factoriser par x

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. Déterminons la branche infinie de (C_f).

On toujours prendre la dernière expression de f donnant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}-x)\\ &= \lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})\\ &= -\infty\end{aligned}$$

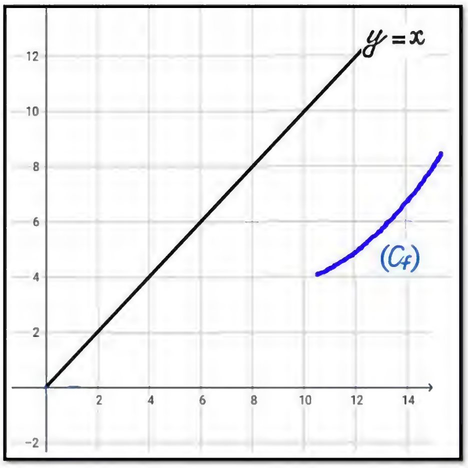
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\infty\\ 0\\ a\neq 0\end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\begin{cases} b\\ \infty\end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$



Remarque

Pourque on choisit le cas où (C_f) est au dessous de (Δ) ?

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$

Donc $f(x)-y<0$ au voisinage de $+\infty$

3- Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-\sqrt{x})}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=-\infty$$

Ici, on parle de la dérivabilité de f en $x_0=0$ à droite, il suffit de remarquer que $f(0)=0$

La dérivabilité

Les tangentes

Interprétation graphique

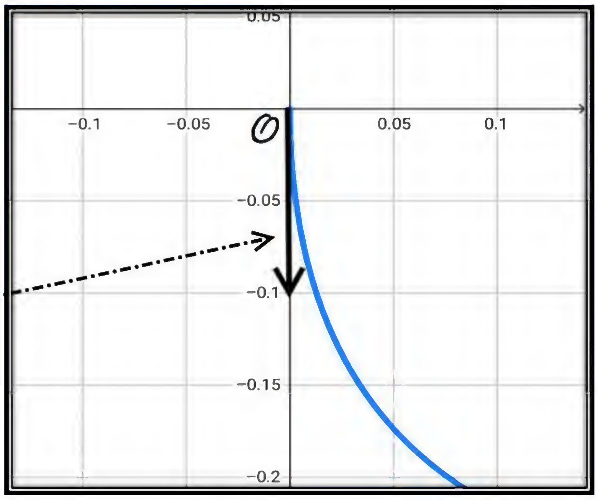
On a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=0$ à droite

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $O(0,0)$ (Dirigée vers le bas)

$\lim\limits_{x\to0^+}\cdots=-\infty$

$\boxed{+}\times\boxed{-}=\boxed{-}$



4- a- Calculons $f'(x)$

On a : $x\mapsto x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et : $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc : $x\mapsto-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

(Somme de deux fonctions dérivables)

Soit $x\in]0;+\infty[$

On calcul toujours sur un intervalle ouvert.

$$f'(x)=(x-\sqrt{x})'$$
$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\ (2\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{(2\sqrt{x})^2-1^2}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

D'où : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,f'(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

b) Le signe de $f'(x)$

Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $f'(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

Remarquer que $f'(x)$ est en meilleure expression

Or : $2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)>0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(4x-1)$

$4x-1=0 \Leftrightarrow 4x=1$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x-1$	$-$		$+$
RÈGLE	Signe de $-a$		Signe de a

$\boxed{a=\frac{1}{4}}$

Le tableau de variations de f

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=1$.

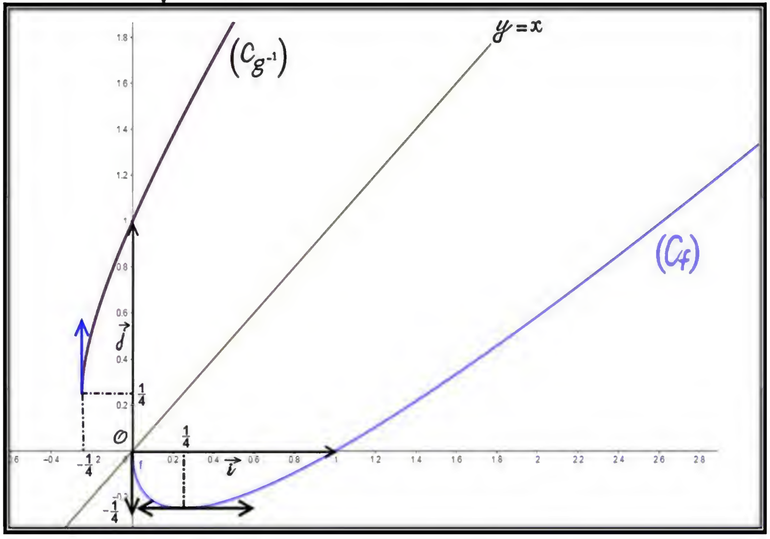
(T) : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
$$=\frac{1}{2}(x-1)+0$$

$\boxed{f'(1)=\frac{1}{2}}$
$\boxed{f(1)=0}$

Donc $\boxed{(T): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

$O;\vec{i},\vec{j})$

5. La représentation de (C_f)



D'après le tableau de variations de f on a $f'\left(\frac{1}{4}\right)=0$

Donc, au point $C\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ on aura une tangente horizontale

On trace la branche infinie

6. a. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

On a g est continue sur I

(Car elle dérivable sur I)

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que

$$J=g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)$$
$$=\left[g\left(\frac{1}{4}\right);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$
$$=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(\mathrm{I})$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b. On a : $g(x)=x-\sqrt{x}$

Donc : $g(4)=4-\sqrt{4}=2$

Montrons que g^{-1} est dérivable en $x_0=2$

On a $g(4)=2$

Donc $g^{-1}(2)=4$

Et on a g est dérivable en 4

et $g'(4)=f'(4)=\dfrac{4.4-1}{2\sqrt{4}\,(2\sqrt{4}+1)}=\dfrac{3}{5}$

Donc : $g'(4)\neq 0$

Soit $g(a)=b$

Alors $g^{-1}(b)=a$

Si $\begin{cases} g \text{ est dérivable en } a \\ g'(a)\neq 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} g^{-1} \text{ est dérivable en } b \\ (g^{-1})'(b)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(b))}=\dfrac{1}{g'(a)} \end{cases}$

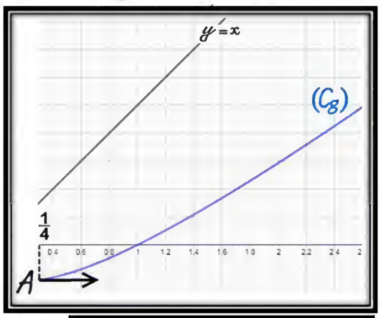
D'où g^{-1} est dérivable en $x_0=2$, et on a :

$$(g^{-1})'(2)=\frac{1}{g'(g^{-1}(2))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$$

c- Représentation de $(C_{g^{-1}})$

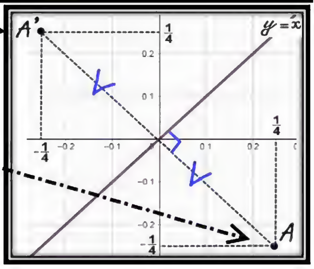
$(C_{g^{-1}})$ est la symétrique de (C_g) par raport à la droite $y=x$

Explication

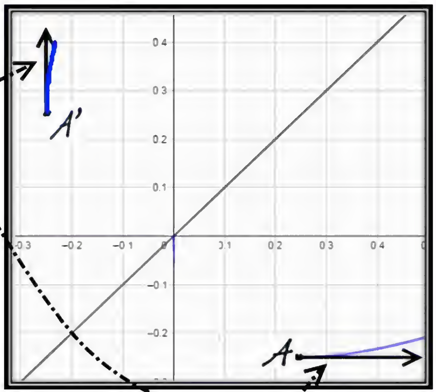


- (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle $I=\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$
- La droite $(\Delta): y=x$ change les rôles de x et y

Autrement dit :



- L'image du point $A\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ est $A'\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$



- L'image de demi-tangente horizontale à droite du point A est la demi-tangente verticale au point A' dirigeé vers le haut

- L'image de la branche parabolique de direction la droite $y=ax$ est la branche parabolique de direction la droite $y=\frac{1}{a}x$

  Dans notre cas $a=1$

- (C_g) coupe l'axe des abscisses au point $C(1;0)$
  - $(C_{g^{-1}})$ coupe l'axe des ordonneés au point $C'(0;1)$
- On a g est strictement croissante sur I
  - g^{-1} est strictement croissante sur J

Représentation de $(C_{g^{-1}})$ (Voir la figure "Question n°5")

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} \;;\; x\leqslant 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+3} \;;\; x>1 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b. Montrer que f est continue en $x_0=1$

2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

3. Étudier les branches infinies de (C_f)

4. a. Montrer que : $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1-x}+1)} \;;\; \forall x\in]-\infty;1[\\ f'(x)=\dfrac{12x^2}{(x^3+3)^2} \;;\; \forall x\in]1;+\infty[\end{cases}$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$

   c. Dresser le tableau de variations de f

5. Donner une équation cartésienne de la demi-tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(1;0)$ à droite

6. Représenter (C_f) et (T)

7. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$

   a. Montrer que g admet une fonction reciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

   b. Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x\in J$.

   c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

   d. Montrer que g^{-1} est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}}$ sur $[0;1[$

CORRECTION

1. a. Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{1-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{x^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x-1+2|x|\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x-1-2x\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= -\infty$$

Car : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 1 \end{cases}$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$ $x+2\sqrt{-x}$
Et puisque $2\sqrt{-x} \neq |x|$ alors, il suffit de factoriser.

$|x| = -x$ Car : $x \to -\infty$

b- La continuité de f en $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x-1+2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^3-1}{x^3+3} = 0$$

$$f(1) = 1-1+2\sqrt{1-1} = 0$$

Puisque $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0=1$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0

Pour calculer $f(1)$, on remplace dans l'expression où $x \leqslant 1$

2- La dérivabilité de f en $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{x-1} + 2\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} 1+2\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{x\to1^-} 1+2\frac{(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{x\to1^-} 1-\frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{x\to1^-} 1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}$$
$$= -\infty$$

$\frac{2}{0^+} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à gauche

Ici, il faut étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x-1\to0$ et $\sqrt{1-x}\to0$ ça sera mieux de séparer les limites

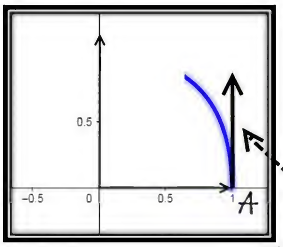
Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(1;0)$ à gauche (Dirigée vers le haut)

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dots = -\infty$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+3}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3-1}{(x-1)(x^3+3)}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+3)}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+3}$$
$$= \frac{3}{4}$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

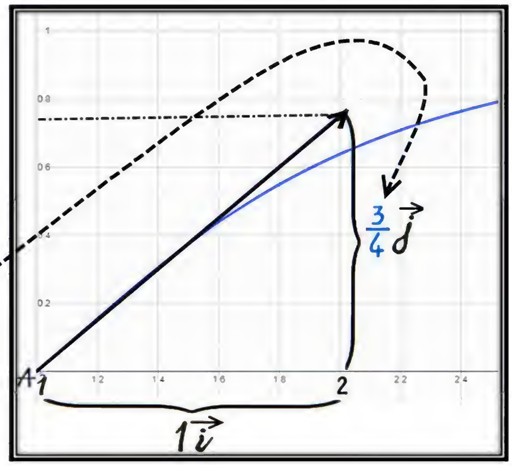
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$x^3-1=x^3-1^3$

Donc f est dérivable en $x_0=1$ à droite et on a $f'_d(1)=\frac{3}{4}$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente à droite du point $A(1;0)$ de coefficient directeur égal à $\frac{3}{4}$

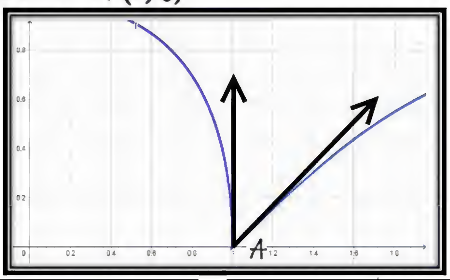


Conclusion

f n'est pas dérivable en $x_0=1$

Remarques

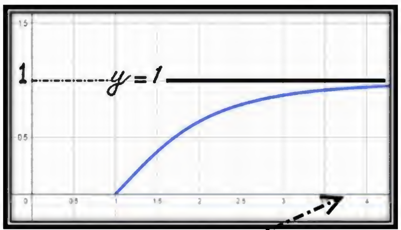
- f est continue en $x_0 \not\Rightarrow f$ est dérivable en x_0 ✗
- f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0 ✓
- (C_f) admet deux demi-tangente au point $A(1;0)$
  $A(1;0)$ est appelé : Point anguleux.



3 - Les branches infinies de (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Donc la droite dont l'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C_f) voisinage de $+\infty$



On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=1$$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1+2\sqrt{1-x}-x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(-1+2\sqrt{1-x})$$
$$=+\infty$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

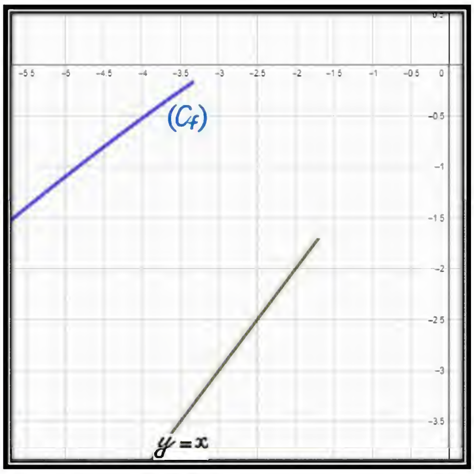
Ça sera mieux d'utiliser la dernière expression donnant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}= \begin{cases}\infty\\ 0\\ a\neq 0\end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)= \begin{cases} b\\ \infty\end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$



Remarque

Pourque on choisit le cas où (C_f) est au dessus de (Δ) ?

car $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=+\infty$

Donc $f(x)-y>0$ au voisinage de $-\infty$

4 - a - Calculons $f'(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$

Soit $x\in]-\infty;1[$

$$f'(x)=(x-1+2\sqrt{1-x})'$$
$$=(x)'-(1)'+2(\sqrt{1-x})'$$
$$=1-0+2\,\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}$$
$$=1+\frac{-1}{\sqrt{1-x}}$$

Toujours, il faut calculer $f'(x)$ sur un intervalle ouvert

$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(ax)'=a$

$a'=0$

$(k\,u)'=k.u'$ tel que $k\in\mathbb{R}$

$$= \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}^2-1^2}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

D'où : $\forall x \in]-\infty;1[$; $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+3}\right)'$$

$$= \frac{(x^3-1)'(x^3+3)-(x^3+3)'(x^3-1)}{(x^3+3)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^3+3)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+3)^2}$$

$$= \frac{3x^5+9x^2-3x^5+3x^2}{(x^3+3)^2}$$

$$= \frac{12x^2}{(x^3+3)^2}$$

D'où : $\forall x \in]1;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{12x^2}{(x^3+3)^2}$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

$$\boxed{a' = 0}$$

b- Le signe de

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$

Soit $x \in]-\infty;1[$

On a $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$

Or $\forall x \in]-\infty;1[$; $\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1) > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x$

$-x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		1
$-x$		$+$	0	$-$	$\|\|$

Donc

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Soit $x\in]1;+\infty[$

On a $f'(x)=\dfrac{12x^2}{(x^3+3)^2}$

Or $\forall x\in]1;+\infty[$; $(x^3+3)^2>0$ et $12x^2>0$

Donc $\boxed{\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f'(x)>0}$

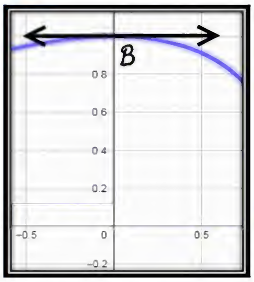
c~ Le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

$f(0)=0-1+2\sqrt{1-0}=1$

Remarques

On a les deux barres en 1 entraîne que f n'est pas dérivable en $x_0=1$



$f'(0)=0$

Graphiquement entraîne que (C_f) admet une tangente horizontale au point $B(0;1)$

5~ Une équation cartésienne de la demi-tangente (T) à (C_f) au point $A(1;0)$ à droite

$$(T):\ y=f'_d(1)(x-1)+f(1)$$
$$=\frac{3}{4}(x-1)+0$$

D'où : $(T):\ y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$

6~ Représentation de (T) et (C_f)

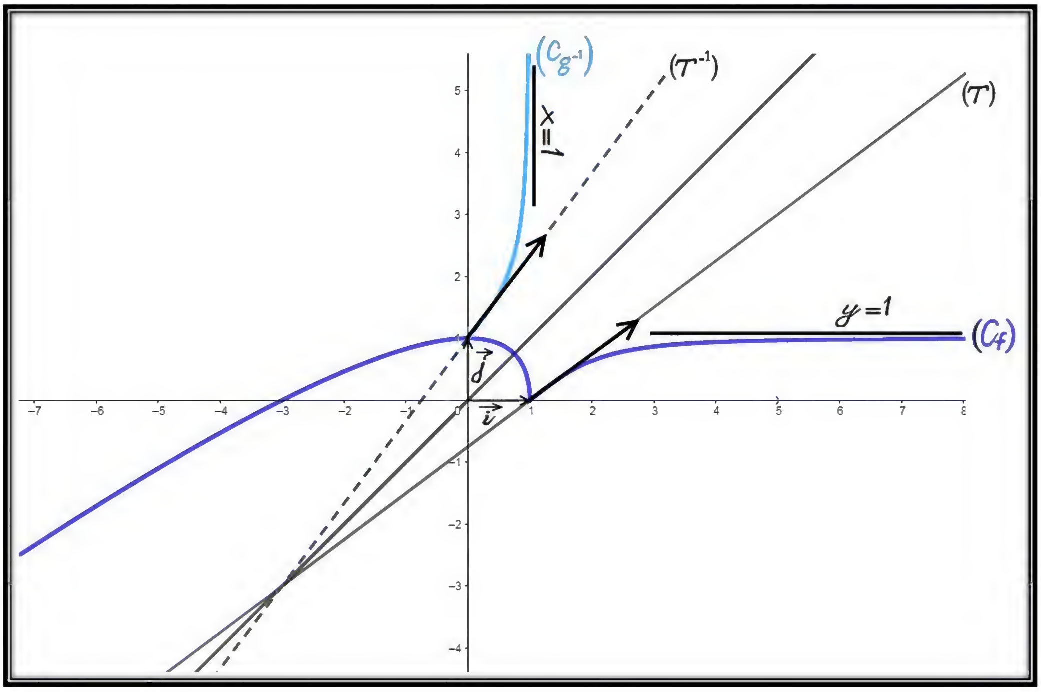
Explication

Pour la droite (T) : $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$

On prend les deux points $A(1;0)$ et $C\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$

Pour la courbe (C_f)

- On représente les demi-tangente au point A(1;0)
- La tangente horizontale au point B(0;1)
- La droite horizontale $y=1$
- La droite $y=x$ (La branche parabolique)
- En fin, le tableau de variations de f



$\boxed{7}$ a

g est la fonction définie sur par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+3} \;;\; x>1 \\ g(1)=0 \end{cases}$

On a g est continue sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$
(Car g est une fonction rationnelle)

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$J=g([1;+\infty[)$

$=\left[g(1);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$=[0;1[$

> Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
> Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle g(I)

b~ Déterminons $g^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

Soit $x \in J$, cherchons $y \in I$ tel que $g(y)=x$

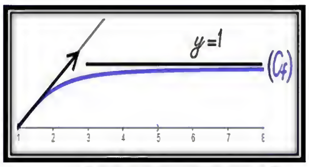
$$g(y)=x \Leftrightarrow \frac{y^3-1}{y^3+3}=x$$
$$\Leftrightarrow y^3-1=x(y^3+3)$$
$$\Leftrightarrow y^3-1=xy^3+3x$$
$$\Leftrightarrow y^3-xy^3=1+3x$$
$$\Leftrightarrow y^3(1-x)=1+3x$$
$$\Leftrightarrow y^3=\frac{1+3x}{1-x} \qquad 1-x \neq 0 \text{ Car } x \in [0;1[$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}} \qquad (\forall x \in J);\ \frac{1+3x}{1-x} \geq 0$$

D'où $\boxed{(\forall x \in J);\ g^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}}}$

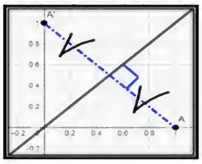
c~ Représentation de $(C_{g^{-1}})$ Voir figure ~ Question 5~

Explication

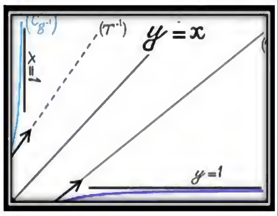
- (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$



- La droite (Δ): $y=x$ change les rôles de x et y
  Autrement dit :

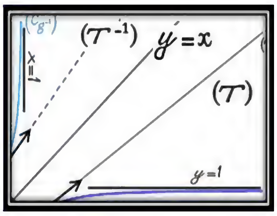


- L'image du point $A(1;0)$ est $A'(0;1)$
- L'image de la droite $y=1$
  est la droite $x=1$



- L'image de demi-tangente (T) à droite du point A :

On a (T): $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}y-\frac{3}{4}$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}(y-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x=y-1$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+1$$



Donc (T^{-1}): $y=\frac{3}{4}x+1$

d) Montrons que g^{-1} est une fonction primitive de la fonction

$$h : x \longmapsto \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que $(g^{-1})'(x) = h(x)$

Calculons $(g^{-1})'(x)$

Soit $x \in J$

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}}$$

$$\boxed{(ax)' = a}$$

$$\boxed{a' = 0}$$

$$(g^{-1})'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}}\right)'$$

$$= \frac{\left(\frac{1+3x}{1-x}\right)'}{3\left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{(1+3x)'(1-x)-(1-x)'(1+3x)}{(1-x)^2}}{3\left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}}\right)^2}$$

$$= \frac{3(1-x)+(1+3x)}{3(1-x)^2\left(\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-x}}\right)^2}$$

$$= \frac{3-3x+1+3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^6}\sqrt[3]{\frac{(1+3x)^2}{(1-x)^2}}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-x)^6 \times \frac{(1+3x)^2}{(1-x)^2}}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-x)^4 \times (1+3x)^2}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x+x^2)^2\,(1+3x)^2}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{\left((1+3x)(1-2x+x^2)\right)^2}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{\left((1+3x)(1-2x+x^2)\right)^2}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt[3]{(1-2x+x^2+3x-6x^2+3x^3)^2}}$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x^3-5x^2+x+1)^2}} \quad \text{pour tout } x \in J$$

D'où g^{-1} est une fonction primitive de la fonction h

EXERCICE 27

Soit f la fonction définie par : $\boxed{f(x)=x+1-\sqrt{x^2-x-2}}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. a. Déterminer D_f le domaine de définition de f

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   c. Étudier la continuité de f sur D_f

2. Étudier la dérivabalité de f à droite de $x_0=2$ et à gauche de $x_0=-1$, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus

3. a. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

   c. Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)

4. a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$, pour tout $x\in D_f\setminus\{-1;2\}$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty;-1[$ et $]2;+\infty[$

   c. Dresser le tableau de variations de f

5. a. Montrer que : $\forall x\in D_f\setminus\{-1;2\}$; $f''(x)=\dfrac{9}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3}$

   b. En déduire la concavité de la courbe (C_f)

6. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point $A(3;2)$

7. Tracer la courbe (C_f)

8. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Étudier la dérivabilité de g^{-1} en $x_0 = 3$ à gauche, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c- Représenter $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

CORRECTION

$\sqrt{u(x)} \longrightarrow u(x) \geq 0$

1- a- Déterminons D_f

$x \in D_f \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - x - 2 \geq 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$

Son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 9$

Puisque $\Delta > 0$

Alors le trinôme $x^2 - x - 2$ admet deux racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Si $\Delta > 0$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

supposons $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

D'où : $D_f =]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$

b- Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Il suffit de remplacer.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$$
$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$
Et puisque $x = \sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 2}\right) + 1$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - x - 2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} + 1$$

Remarquer que 1 ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laissé loin.

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^2 - x - 2}^{\,2}}{x + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} + 1$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x - 2)}{x + |x|\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x + x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)} + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} + 1$$

$$= \frac{1}{2}+1$$

$$= \frac{3}{2} \qquad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} = 1 \end{cases}$$

c. La continuité de f sur D_f.

On a : $x \mapsto x^2-x-2$ est continue sur D_f

Et : $(\forall x \in D_f)$; $x^2-x-2 \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2-x-2}$ est continue sur D_f

Et : $x \mapsto -\sqrt{x^2-x-2}$ est continue sur D_f

Et puisque : $x \mapsto x+1$ est continue sur D_f

Alors $f : x \mapsto x+1-\sqrt{x^2-x-2}$ est continue sur D_f

(Somme de deux fonctions continues)

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
Et $(\forall x \in I)$; $u(x) \geq 0$
Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

2. La dérivabilité de f en $x_0=2$ à droite

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2-\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} - \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 1 - \frac{\sqrt{x^2-x-2}\,\sqrt{x^2-x-2}}{(x-2)\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 1 - \frac{x^2-x-2}{(x-2)\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 1 - \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 1 - \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$= -\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x-2 \to 0$ et $\sqrt{x^2-x-2} \to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

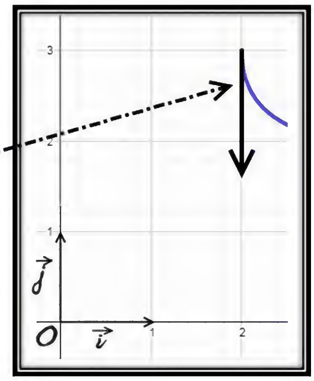
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=2$ à droite

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(2,3)$ (Dirigée vers le bas)

$\lim\limits_{x\to 2^+} \cdots = -\infty$

$\oplus \times \ominus = \ominus$



La dérivabilité de f en $x_0=-1$ à gauche

$$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$$
$$= \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x+1} - \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$$
$$= \lim\limits_{x\to -1^-} 1 - \frac{\sqrt{x^2-x-2}\,\sqrt{x^2-x-2}}{(x+1)\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$= \lim\limits_{x\to -1^-} 1 - \frac{x^2-x-2}{(x+1)\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$= \lim\limits_{x\to -1^-} 1 - \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$= \lim\limits_{x\to -1^-} 1 - \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$= +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$ à gauche

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite :
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x+1\to 0$ et $\sqrt{x^2-x-2}\to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

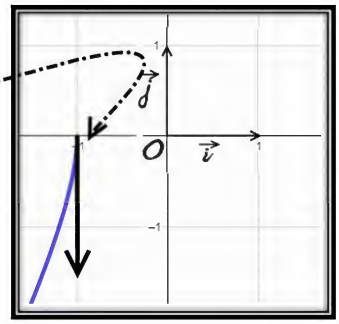
$\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-x-2}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $C(-1,0)$ (Dirigée vers le bas)

$\lim\limits_{x\to -1^-} \cdots = +\infty$

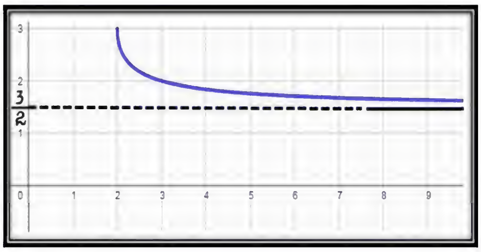
$\ominus \times \oplus = \ominus$



3) a) Déterminons la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

Donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=\frac{3}{2}$ au voisinage de $+\infty$



b- Montrons que la droite (Δ) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Pour cela, il suffit de vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}-2x-\frac{1}{2}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{x^2-x-2}^2}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x^2-x+\frac{1}{4}-(x^2-x-2)}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\frac{9}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\&=0\end{aligned}$$

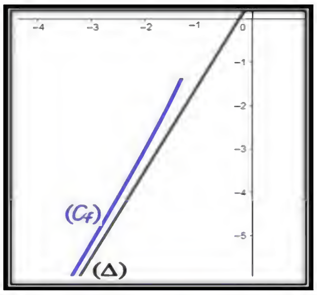
Ça sera mieux de factoriser par le $(-)$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty-(+\infty)$
Et puisque $x=\sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Remarquer que le dénominateur tend vers $-\infty$

D'où la droite (Δ) $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$



c- La position relative de (C_f) et (Δ)

Étudions le signe de $f(x)-y$

Il faut étudier le signe de $f(x)-y$

$$\begin{aligned}f(x)-y&=x+1-\sqrt{x^2-x-2}-2x-\frac{1}{2}\\&=-x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Soit $x\in[2;+\infty[$

Donc $x\in[2;+\infty[\Rightarrow x\geqslant 2$
$\Rightarrow -x\leqslant -2$
$\Rightarrow -x+\frac{1}{2}\leqslant -\frac{3}{2}$

Donc : $-x+\frac{1}{2}<0$

Et on a $-\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 0$

Donc $(\forall x\in[2;+\infty[);-x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}<0$

D'où (C_f) est au dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

Soit $x\in]-\infty;-1]$

On a : $f(x)-y=x+1-\sqrt{x^2-x-2}-2x-\frac{1}{2}$
$$=-\frac{\frac{9}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}$$

Or $x\leqslant -1 \Rightarrow x-\frac{1}{2}\leqslant -\frac{3}{2}$
$$\Rightarrow x-\frac{1}{2}<0$$

Et $-\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 0$

Donc : $x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}<0$ et $\frac{9}{4}>0$

Donc : $\dfrac{\frac{9}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}<0$

Donc : $-\dfrac{\frac{9}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x-2}\right)}>0$

Donc : $(\forall x\in]-\infty;-1]);\ f(x)-y>0$

D'où (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

Ici, on a $-x>0$ et $-\sqrt{x^2-x-2}<0$
Dans ce cas on peut comparer
comparer entre $\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2$ et $\sqrt{x^2-x-2}^2$
ou bien étudier le signe
de $f(x)-y$ en multipliant
par le conjugué.
(On utilisons l'expressions
de la dernière étape
de $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)$)

Conclusion

(C_f) est au dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2;+\infty[$
(C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

4. a. Montrons que : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$, pour tout $x\in D_f\setminus\{-1;2\}$

Soit $x\in D_f\setminus\{-1;2\}$
$$f'(x)=\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right)'$$
$$=1-\frac{(x^2-x-2)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$=1-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

D'où : $(\forall x\in D_f\setminus\{-1;2\});\ f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

Remarquer que $x\in D_f\setminus\{-1;2\}$
car f n'est pas
dérivable en $x_0=2$ à droite
et en $x_0=-1$ à gauche

$(ax)'=a$ $\quad a'=0$

$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

b- Le signe de $f'(x)$

On a $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[\ ;\ f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

Puisque $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[\ ;\ 2\sqrt{x^2-x-2}>0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)$

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

Soit $x\in]-\infty;-1[$

On a : $x<-1 \Rightarrow 2x<-2$
$\Rightarrow 2x-1<-3$
$\Rightarrow -(2x-1)>3$

Et on a : $\forall x\in]-\infty;-1[\ ;\ 2\sqrt{x^2-x-2}>0$

Donc : $\forall x\in]-\infty;-1[\ ;\ 2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)>3$

D'où : $\forall x\in]-\infty;-1[\ ;\ f'(x)>0$

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$

Soit $x\in]2;+\infty[$

On a : $\forall x]2;+\infty[;2\sqrt{x^2-x-2}>0$ et $(2x-1)>0$

$\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2=4\left(x^2-x-2\right)=4x^2-4x-8$

$(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

Donc : $\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2-(2x-1)^2=4x^2-4x-8-\left(4x^2-4x+1\right)=-9$

Donc : $\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2-(2x-1)^2<0$

Donc : $\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2<(2x-1)^2$

Et puisque : $2\sqrt{x^2-x-2}>0$ et $(2x-1)>0$

Alors $2\sqrt{x^2-x-2}<(2x-1)$

Donc : $2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)<0$

Et par suite : $\forall x]2;+\infty[;f'(x)<0$

Conclusion

$$\boxed{\begin{cases}\forall x\in]-\infty;-1[\ ;\ f'(x)>0\\ \forall x]2;+\infty[;f'(x)<0\end{cases}}$$

c- Le tableau de variations de f

D'après le résultat de la question précédente

$$\begin{cases}\forall x\in]-\infty;-1[\ ;\ f'(x)>0\\ \forall x]2;+\infty[;f'(x)<0\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	‖	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	‖	‖	$3 \searrow \frac{3}{2}$

Les deux barres en -1 et 2, juste car $f'_g(-1)$ et $f'_d(2)$ n'existent pas

5 - a - Montrons que : $\forall x \in D_f \setminus \{-1;2\}$; $f''(x) = \dfrac{9}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3}$

Soit $x \in D_f \setminus \{-1;2\}$

On a : $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

Donc : $f'(x) = 1 - \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$a' = 0$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Calculons $f''(x)$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\right)'$$

$$= 0 - \frac{(2x-1)' \times 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1)\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)'}{\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2}$$

$$= -\frac{2 \times 2\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) \times 2 \times \dfrac{(x^2-x-2)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}}{\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2}$$

$$= -\frac{4\sqrt{x^2-x-2} - (2x-1) \times \dfrac{(2x-1)}{\sqrt{x^2-x-2}}}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2}$$

$$= -\frac{\dfrac{4\sqrt{x^2-x-2}^{\,2} - (2x-1)^2}{\sqrt{x^2-x-2}}}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2}$$

$$= -\frac{4(x^2-x-2) - (4x^2-4x+1)}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$= -\frac{-9}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3}$$

D'où : $\forall x \in D_f \setminus \{-1;2\}$; $f''(x) = \dfrac{9}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3}$

b - La concavité de (C_f)

On a : $\forall x \in D_f \setminus \{-1;2\}$; $f''(x) = \dfrac{9}{4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3}$

Or : $\forall x \in D_f \setminus \{-1;2\}$; $4\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^3 > 0$ et $9 > 0$

Donc $\forall x \in D_f \setminus \{-1;2\}$; $f''(x) > 0$

D'où (C_f) est convexe sur D_f

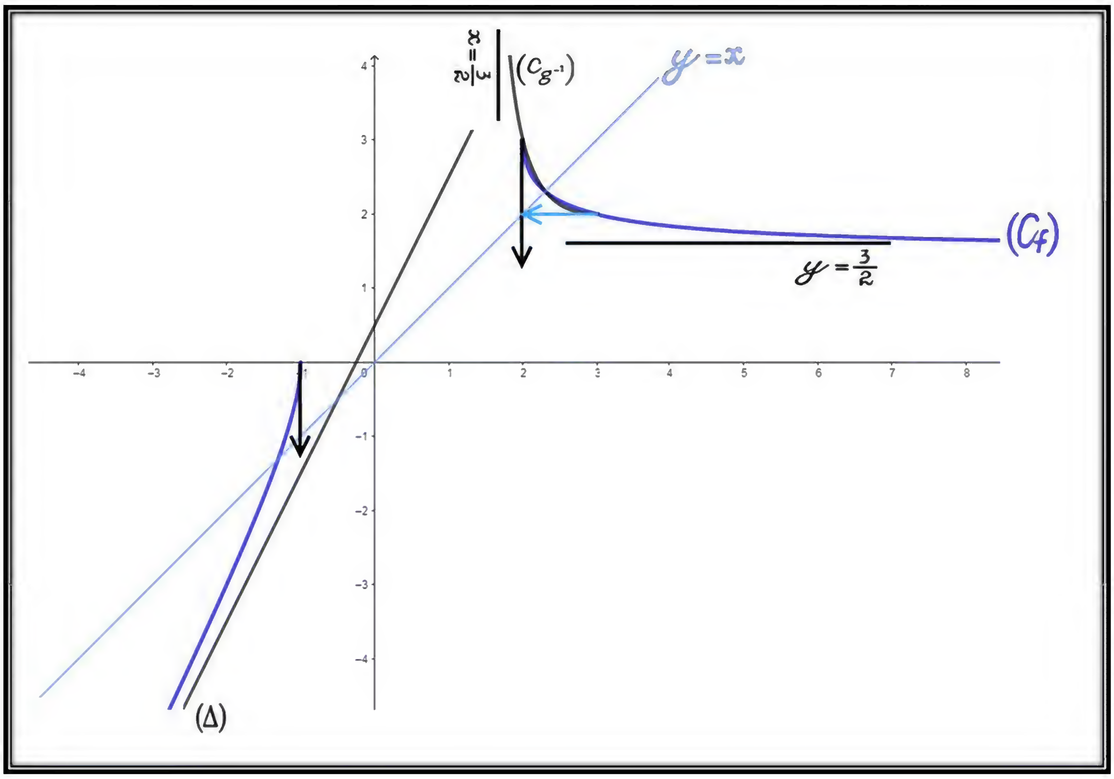
6. Une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point $A(3;2)$

$$(T) : y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
$$= -\frac{1}{4}(x-3)+2$$
$$= -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 2$$
$$= -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

7. Représentation de (C_f)

Explication

- La droite (Δ) passe par $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$
- On représente les deux demi-tangentes verticales en $A(2,3)$ et $C(-1,0)$
- La droite horizontale $y=\frac{3}{2}$ (Juste au voisinage de $+\infty$)
- En fin utiliser le tableau de variations de f



$\boxed{8}$ a

On a g est continue sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

Et g est strictement décroissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$J=g([2;+\infty[)$$
$$=\left[g(1);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$
$$=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);g(2)\right]$$
$$=\left]\frac{3}{2};3\right]$$

> Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
> Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

> Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b La dérivabilité de g^{-1} en $x_0=3$ à gauche

On a $g(2)=3$

Donc $g^{-1}(3)=2$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(3)}{x-3}$$

> Ici, on ne peut pas utiliser la propriété

> Soit $g(a)=b$
> Alors $g^{-1}(b)=a$
> Si $\begin{cases} g \text{ est dérivable en } a \\ g'(a)\neq 0\end{cases}$
> Alors $\begin{cases} g^{-1} \text{ est dérivable en } b \\ (g^{-1})'(b)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(b))}=\dfrac{1}{g'(a)}\end{cases}$

Posons $u=g^{-1}(x)$

Donc $x=g(u)$

Si $x\to3^-$

Alors $u\to2^+$

Donc, on aura

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	3	$\searrow$	

> car g n'est pas dérivable en 2
> Dans ce cas, il faut effectuer le changemet de variable en utilisant le résultat de la question $\boxed{2}$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{u\to2^+}\frac{u-2}{g(u)-g(2)}$$
$$=\lim_{u\to2^+}\frac{1}{\dfrac{g(u)-g(2)}{u-2}}$$

Or $\displaystyle\lim_{u\to2^+}\frac{g(u)-g(2)}{u-2}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$

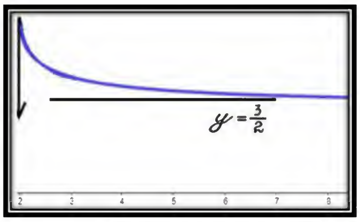
Donc $\lim_{u \to 2^+} \dfrac{1}{\dfrac{g(u)-g(2)}{u-2}} = 0$

Donc $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{g^{-1}(x)-g^{-1}(3)}{x-3} = 0$

D'où g^{-1} est dérivable en $x_0 = 3$ à gauche et on a $g'_g(3) = 0$

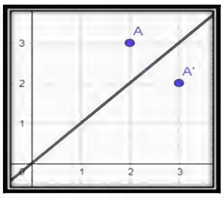
c- Représentation de $(C_{g^{-1}})$ Voir figure - Question 5-

Explication

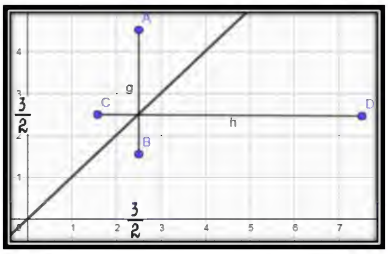


- (C_g) est juste (C_f) sur l'intervalle I=
- La droite (Δ): $y=x$ change les rôles de x et y

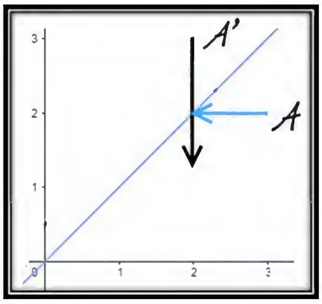
Autrement dit :



- L'image du point $A(2,3)$ est $A'(3,2)$
- L'image de la droite $y=\frac{3}{2}$
  est la droite $x=\frac{3}{2}$



- L'image de demi-tangente verticale
  à droite du point A dirigée vers le le bas
  est la demi-tangente horizontale
  à gauche du point A'



EXERCICE 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x^3} \ ; \ x<1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2-1} \ ; \ x \geqslant 1 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. Montrer que f est continue en $x_0=1$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Étudier la dérivabalité de f en $x_0=1$, puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus
4. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
   b. Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[1;+\infty[$
5. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
6. a. Calculer $f'(x)$ sur les deux intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$
   b. Étudier le signe de $f'(x)$
   c. Dresser le tableau de variations de f
7. Tracer la courbe (C_f)
8. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;1]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in J$.
   c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

CORRECTION

1. La continuité de f en $x_0=1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 + \sqrt[3]{1-x^3}\right) = 1$$

Il suffit de remplacer.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = 1$$

$f(1)=1+\sqrt{1^2-1}=1$

Il suffit de remplacer.

Et puisque : $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

Alors f est continue en $x_0=1$

2. Calcul des limites

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\sqrt[3]{1-x^3}\right) \quad = +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to -\infty} 1-x^3=+\infty\right)$$

Il suffit de remplacer.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x=+\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}=+\infty \end{cases}$$

3. La dérivabilité de f en $x_0=1$

La dérivabilité de f en $x_0=1$ à gauche

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+\sqrt[3]{1-x^3}-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)(1^2+x+x^2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(1+x+x^2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(1+x+x^2)}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$
$$=-\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a}^2$

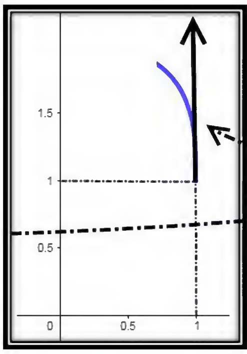
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$ à gauche

Interprétation graphique

☞ (C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(1,1)$ (Dirigée vers le haut)

$\lim\limits_{x \to 1^-} \cdots = -\infty$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$



La dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$= +\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x-1 \to 0$ et $\sqrt{x^2-1} \to 0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

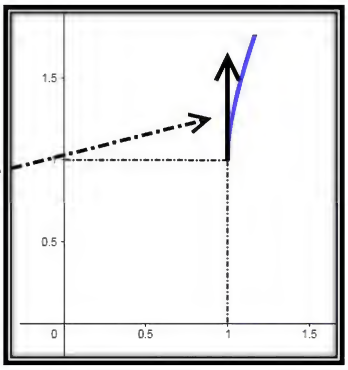
Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à gauche

Interprétation graphique

☞ (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,1)$ (Dirigée vers le haut)

$\lim\limits_{x \to 1^+} \cdots = +\infty$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$



4. Montrons que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Il suffit de vérifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-2x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x^2-1}-2x)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

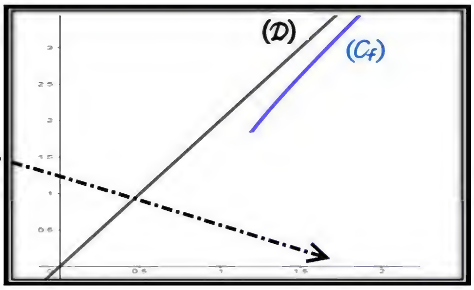
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=0$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty-(+\infty)$
Et puisque $x=\sqrt{x^2}$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

D'où la droite $(D): y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$



6. La position relative de (C_f) et (D) sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Étudions le signe de $f(x)-y$ sur $[1;+\infty[$

Il faut étudier le signe de $f(x)-y$

Soit $x\in[1;+\infty[$

On a : $f(x)-2x = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

Or : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ \sqrt{x^2-1}+x>0$ et $-1<0$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f(x)-2x<0$

On utilisons l'expressions de la dernière étape de $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$

D'où (C_f) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[1;+\infty[$

5. Déterminons la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\frac{\sqrt[3]{-x^3\left(-\frac{1}{x^3}+1\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\frac{\sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x^3}+1\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\frac{-x\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3}+1\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3}+1\right)}$$

$$=-1$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
Dans ce cas, on pense toujours à factoriser
Pour $\sqrt[3]{1-x^3}$, on doit factoriser par $-x^3$ à l'interieur de $\sqrt[3]{\ }$ pour avoir $-x^3>0$

$-x^3=(-x)^3$

Calculons $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

$=\lim_{x\to-\infty}(1+\sqrt[3]{1-x^3}+x)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-x^3}+x)((\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2)}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+1$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-x^3})^3+x^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+1$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3+x^3}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+1$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}+1$

$=1$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Remarquer que 1 ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laissé loin.

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$
Et puisque $\sqrt[3]{-x^3}=-x$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

Si $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

Calculons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=$ ∞ ; 0 ; $a\neq0$

Calculons $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=$ b ; ∞

Donc la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Remarque

On a

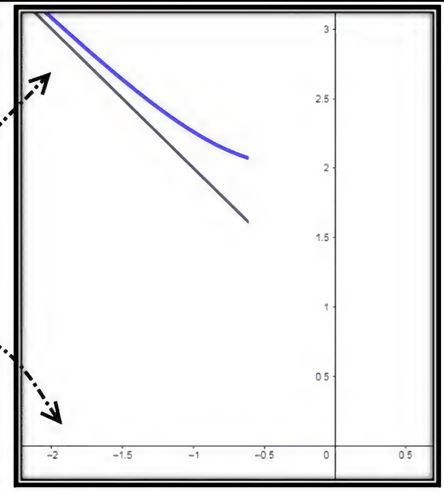
$f(x)-y=\frac{1}{(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}$

Or, au voisinage de $-\infty$

on a $(\sqrt[3]{1-x^3})^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2>0$

Donc $f(x)-y>0$ (pour x assez petit)

Autrement dit (C_f) est au dessus de (Δ) au voisinage de $-\infty$



6. a. Calculons $f'(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$

Soit $x\in]-\infty;1[$

$f'(x)=(1+\sqrt[3]{1-x^3})'$

$$= 0 + \frac{(1-x^3)'}{3\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2}{3\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$

$$= -\frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$$

D'où : $(\forall x \in]-\infty;1[) ; f'(x) = -\dfrac{x^2}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$

$\boxed{a' = 0}$

$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$

$\boxed{\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}}$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)'$$

$$= x' + \left(\sqrt{x^2-1}\right)'$$

$$= 1 + \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

D'où : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\boxed{a' = 0}$

$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

On peut s'arrêter ici, car $1>0$ et $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ le fait que $x>1$

b. Étudions le signe de $f'(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$

On a : $(\forall x \in]-\infty;1[) ; f'(x) = \dfrac{-x^2}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}$

Or : $\forall x \in]-\infty;1[$; $\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 > 0$ et $-x^2 \leq 0$

Donc : $\forall x \in]-\infty;1[$; $f'(x) \leq 0$

Remarque que $f'(x)$ s'annule en 0 car $0 \in]-\infty;1[$

Il faut bien utiliser les symboles $\geq ; \leq ; >$ et $<$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Or : $\forall x \in]1;+\infty[$; $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ et $1>0$

Donc : $\forall x \in]1;+\infty[$; $f'(x) > 0$

Conclusion

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in]-\infty;1[\; ; \; f'(x) \leq 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[\; ; \; f'(x) > 0 \end{cases}}$$

c- Le tableau de variations de f

D'après les résultats précédents, on aura :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			1	$\nearrow$	$+\infty$

Les deux barres en 1, juste car $f'(1)$ n'existe pas

Remarques importantes

On a $f'(0)=0 \Leftrightarrow (C_f)$ admet une tangente horizontale au point $B(0;2)$ $(f(0)=2)$

On a f' s'annule en 0 et ne change pas son signe
$\Rightarrow$ Le point $B(0;2)$ est un point d'inflexion
(C'est une condition suffisante et n'est pas nécessaire)

7- La représentation de (C_f)

Explication

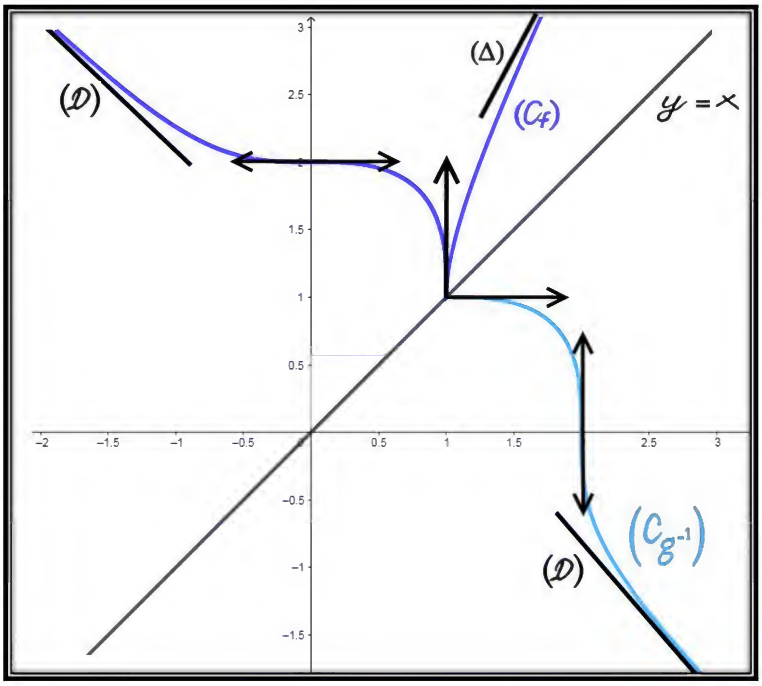
Représentation des tangentes

- Les deux demi-tangentes verticales en $A(1,1)$
- La tangente horizontale au point $B(0;2)$

Représentation des asymptotes

- La droite $(D): y=2x$ passe par $O(0;0)$ et $C(1;2)$
- La droite $(\Delta): y=-x+1$ passe par $E(1;0)$ et $F(0;1)$

En fin, traduire le tableau de variations de f



8-

On a : $\begin{cases} g(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x^3} \ ; \ x<1 \\ g(1) = 1 \end{cases}$

On a : $x \mapsto 1-x^3$ est continue sur $]-\infty;1[$

Et $\forall x \in]-\infty;1[\ ; 1-x^3 \geqslant 0$

Donc $x \mapsto \sqrt[3]{1-x^3}$ est continue sur $]-\infty;1[$

Et comme $x \mapsto 1$ est continue sur $]-\infty;1[$

Alors $g : x \mapsto 1+\sqrt[3]{1-x^3}$ est continue sur $]-\infty;1[$

(Comme étant somme de deux fonctions continue)

Et puisque g est continue à gauche de 1 (car f l'est)

Alors g est continue sur $]-\infty;1]$

Et on a g est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que, $J = g(]-\infty;1])$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(\mathrm{I})$

$$\begin{aligned} J &= g(]-\infty;1]) \\ &= \left[g(1) ; \lim_{x\to-\infty} g(x)\right[\\ &= [1;+\infty[\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b- Déterminons $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in J$.

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in \mathrm{I} \end{cases} \iff \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

$g(y)=x \Longleftrightarrow 1+\sqrt[3]{1-y^3}=x$

$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{1-y^3}=x-1$

$\Longleftrightarrow 1-y^3=(x-1)^3$

$\Longleftrightarrow y^3=1-(x-1)^3$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $g(y)=x$

Si $x\in[1;2]$

$x\leqslant 2 \Rightarrow x-1\leqslant 1$

$\Rightarrow (x-1)^3\leqslant 1$

$\Rightarrow 1-(x-1)^3\geqslant 0$

On aura donc :

$g(y)=x \Longleftrightarrow y^3=1-(x-1)^3$

$\Longleftrightarrow y=\sqrt[3]{1-(x-1)^3}$

Ici, on remarque aisement que

- si $x=2$ alors $y^3=0$
- si $x\leqslant 2 \Rightarrow y^3\geqslant 0$
- si $x>2 \Rightarrow y^3<0$

Donc, dans le cas où $x>2$ ($x\in]2;+\infty[$) on aura $1-(x-1)^3<0$

Et on a pas le droit d'écrire $\sqrt[3]{1-(x-1)^3}$

Donc : $\forall x\in[1;2]; g^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-(x-1)^3}$

Si $x\in]2;+\infty[$

On a : $x>2 \Rightarrow x-1>1$

$\Rightarrow (x-1)^3>1$

$\Rightarrow 1-(x-1)^3<0$

$\Rightarrow -\left(1-(x-1)^3\right)>0$

$\Rightarrow (x-1)^3-1>0$

On aura donc $g(y)=x \Longleftrightarrow y^3=1-(x-1)^3$

$\Longleftrightarrow y^3=1-(x-1)^3$

$\Longleftrightarrow -y^3=(x-1)^3-1$

$\Longleftrightarrow (-y)^3=(x-1)^3-1$

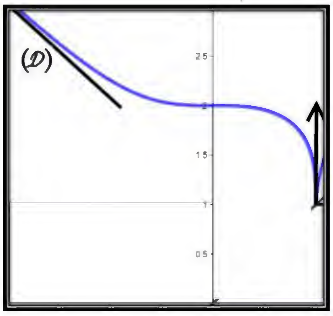
$\Longleftrightarrow -y=\sqrt[3]{(x-1)^3-1}$

$\Longleftrightarrow y=-\sqrt[3]{(x-1)^3-1}$

Donc : $\forall x\in]2;+\infty[; g^{-1}(x)=-\sqrt[3]{(x-1)^3-1}$

Conclusion

$$\begin{cases}\forall x\in[1;2]; g^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-(x-1)^3}\\ \forall x\in]2;+\infty[; g^{-1}(x)=-\sqrt[3]{(x-1)^3-1}\end{cases}$$



c- La représentation de $(C_{g^{-1}})$

g est définie sur $]-\infty;1]$

g^{-1} est définie sur $[1;+\infty[$

(C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la droite $y=x$

La droite $(\Delta): y=x$ change les rôles de x et y

Autrement dit :

(C_g) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(1,1)$ dirigée vers le haut

$(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale à droite du point $A(1,1)$

(C_g) admet une tangente horizontale au point $B(0;2)$

$(C_{g^{-1}})$ admet une tangente verticale au point $B'(2;0)$

L'image de l'asymptote oblique $(\Delta): y=-x+1$

On a : $y=-x+1$ On change les rôles de x et y

$x=-y+1$

$y=-x+1$

L'image de (Δ) est (Δ)

EXERCICE 29

I/ Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

1. Déterminer D_g le domaine de définition de g
2. a. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
   b. Donner une interprétation géométrique aux résultats précédents.
3. Montrer que le point $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{g(x)-1}{x-2}$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu
5. a. Calculer $g'(x)$, pour tout $x\in D_g\setminus\{-2;2\}$
   b. Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $[2;+\infty[$

II/ On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=g(x) & ;\ x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ f(x)=\sqrt{4-x^2}+1\ ; & x\in]-2;2[\end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et montrer que la restriction de f sur l'intervalle $]-2;2[$ est une fonction paire.
2. Étudier la continuité de f en $x_0=2$
3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0=2$ à gauche, puis donner une interprétation géométrique à ce résultat.
4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-2;2[$
   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

5. Tracer (C_f) (On prend $\|\vec{i}\|=2\,cm$)

6. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b. Représenter $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

c. Déterminer $h^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

CORRECTION

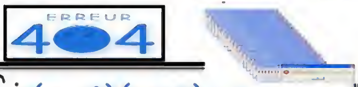
$\frac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x) \neq 0$

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x) \geq 0$

1. Déterminons D_g

$x \in D_g \iff x^2-4 \geq 0$ et $x \neq 0$

$\iff (x-2)(x+2) \geq 0$ et $x \neq 0$



Si $(x-2)(x+2) \geq 0$

Alors $x-2 \geq 0$ ou $x+2 \geq 0$

Étudions le signe de $(x-2)(x+2)$

$x-2=0 \iff x=2$

$x+2=0 \iff x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	
Règle		Signe de a		Signe de (-a)		Signe de a	

Pour étudier le signe de $(x-2)(x+2)$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

Donc $x \in D_g \iff x \in]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$ et $x \neq 0$

D'où : $D_g =]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$

2. a. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2\left(\quad +\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, on pense toujours à factoriser

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$
$$=2$$

Calculons $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}1-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$
$$=0$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
Dans ce cas, on pense toujours à factoriser

b-

On a : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$
Donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$
Donc la droite d'équation $y=0$ (L'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$
Alors la droite d'équation $y=a$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de ∞

3- Montrons que $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de (C_g)

Pour cela, il faut vérifier que

$$\begin{cases}(i)\ (\forall x\in D_g);\ -x\in D_g\\ (ii)\ (\forall x\in D_g);\ g(-x)=2-g(x)\end{cases}$$

Pour montrer qu'un point $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_f), il faut établir les deux conditions suivantes:

$$\begin{cases}(i)\ (\forall x\in D_f);\ 2a-x\in D_f\\ (ii)\ (\forall x\in D_f);\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$$

(i) On a : $D_g =]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$

Donc $-x \in D_g$ pour tout $x \in D_g$

(ii) Vérifions que : $(\forall x \in D_g);\ g(-x) = 2 - g(x)$

Il suffit de vérifier que : $g(-x)+g(x)=2$ pour tout $x \in D_g$

Soit $x \in D_g$

$$\begin{aligned} g(-x)+g(x) &= \frac{-x+\sqrt{(-x)^2-4}}{-x} + \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} \\ &= \frac{-x+\sqrt{x^2-4}}{-x} + \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} \\ &= \frac{-x+\sqrt{x^2-4}}{-x} + \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} \\ &= \frac{-x}{-x} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{-x} + \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ici, on prend $a=0$ et $b=1$

Donc : $2a=0$ et $2b=2$

Pour la condition (ii), il suffit de calculer $f(2a-x)+f(x)$ et de trouver $2b$

Donc : $(\forall x \in D_g);\ g(-x)+g(x)=2$

Autrement dit : $(\forall x \in D_g);\ g(-x)=2-g(x)$

D'où, le point $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de (C_g)

Remarque

Si $\Omega(a;b)$ est le centre de symétrie de (C_g)

Alors, il suffit d'étudier g sur l'intervalle :

$D_E = [a;+\infty[\cap \mathbb{R}^+$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

4. Calculons $\lim_{x\to 2^+} \frac{g(x)-1}{x-2}$

Remarquons bien qu'ici, on parle de la dérivabilité de g en $x_0=2$ à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{g(x)-1}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-4}-x}{x}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}\,\sqrt{x^2-4}}{x(x-2)\sqrt{x^2-4}} \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x(x-2)\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= +\infty$$

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

Interprétation graphique

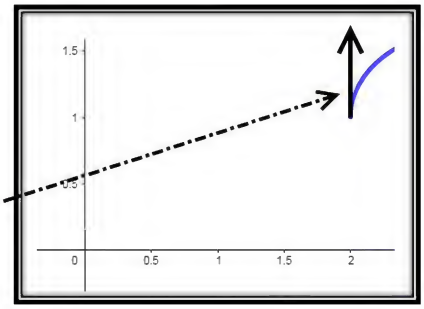
On a $\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{g(x)-1}{x-2} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à droite.

(C_f) admet une **demi-tangente verticale** à droite du point $A(2,1)$ (Dirigée vers le haut)

$\lim_{x \to 2^+} \cdots = +\infty$

$\boxed{+} \times \boxed{+} = \boxed{+}$



5. a. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2;2\}$

Soit $x \in D_g \setminus \{-2;2\}$

On a $g(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

Donc : $g'(x) = \left(1 + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right)'$

$$= 0 + \frac{(\sqrt{x^2-4})' \times x - x' \times (\sqrt{x^2-4})}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{(x^2-4)'}{2\sqrt{x^2-4}} \times x - \sqrt{x^2-4}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} \times x - \sqrt{x^2-4}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x^2-4}}{x^2}$$

$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ $\boxed{a' = 0}$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}}$

$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - \sqrt{x^2-4}\,\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$= \frac{x^2 - (x^2-4)}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in D_g \setminus \{-2;2\});\ g'(x) = \dfrac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}}$

6- Le tableau de variations de g.

On a : $g'(x) = \dfrac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2;2\}$

Et puisque $4>0$ et $x^2\sqrt{x^2-4}>0$ pour tout $x \in D_g \setminus \{-2;2\}$

Alors : $(\forall x \in D_g \setminus \{-2;2\});\ g'(x)>0$

D'où g est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

x	2		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2

II/

1-

Déterminons D_f

Posons : $\begin{cases} f_1(x) = g(x) & ; x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[\\ f_2(x) = \sqrt{4-x^2}+1 ; & x \in]-2;2[\end{cases}$

On a : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$x \in D_{f_1} \Longleftrightarrow x \in D_g$ et $x \in]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$

Et puisque : $D_g =]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$

Donc : $D_{f_1} =]-\infty;2] \cup [2;+\infty[$

$x \in D_{f_2} \iff 4-x^2 \geq 0$ et $x \in]-2;2[$
$\iff (2+x)(2-x) \geq 0$ et $-2<x<2$

Si $(2+x)(2-x) \geq 0$
Alors $2+x \geq 0$ ou $2-x \geq 0$

Pour étudier le signe de $(2+x)(2-x)$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

Étudions le signe de $(2+x)(2-x)$

$2+x=0 \iff x=-2$
$2-x=0 \iff x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(2-x)$		+		+	0	−	
$(2+x)$		−	0	+		+	
$(2-x)(2+x)$		−	0	+	0	−	

Donc : $x \in D_{f_2} \iff -2 \leq x \leq 2$ et $-2<x<2$
$\iff -2<x<2$

Donc : $D_{f_2} =]-2;2[$

Donc, on aura : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$
$=]-\infty;2] \cup [2;+\infty[\cup]-2;2[$
$D_f = \mathbb{R}$

Montrons que la restriction de f sur l'intervalle est une fonction paire

f est paire si et seulement si
$\begin{cases} (i)\ (\forall x \in D_f);\ -x \in D_f \\ (ii)\ (\forall x \in D_f);\ f(-x)=f(x) \end{cases}$

(i) On a $D_{f_2} =]-2;2[$

Donc $(\forall x \in D_{f_2})$; $-x \in D_{f_2}$

Soit $x \in D_{f_2}$

$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2}+1$
$= \sqrt{4-x^2}+1$
$= f(x)$

Donc f est une fonction paire

Remarque

Sur l'intervalle $]-2;2[$, on a f est paire, donc il suffit d'étudier f sur $]-2;2[\cap \mathbb{R}^+ = [0;2[$

D'où le domaine d'étude de f est $D_E = [0;+\infty[$

2 - La continuité de f en $x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$$
$$= 1$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2}+1$$
$$= 1$$
$$f(2) = g(2) = 1$$

Puisque $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

Alors f est continue en $x_0 = 2$

Si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0

Il suffit de remplacer x par 2

3. La dérivabilité de f en $x_0 = 2$ à gauche.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}+1-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2}}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} -\frac{(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$ à gauche

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à gauche, il faut calculer la limite:
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Il suffit de multiplier par le conjugué

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

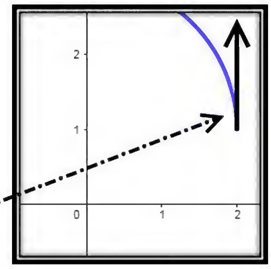
Interprétation graphique

(C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point $A(2,1)$

(Dirigée vers le haut)

$$\lim_{x\to 2^-} \cdots = -\infty$$

$\boxed{-} \times \boxed{-} = \boxed{+}$



Remarque

On a deja étudier la dérivabilité de f en $x_0=2$ à droite car $f=g$ sur $[2;+\infty[$

4. a. Calculons $f'(x)$ pour tout $x\in]-2;2[$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $\quad$ $a'=0$

$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Soit $x\in]-2;2[$

$$f'(x)=(\sqrt{4-x^2}+1)'$$
$$=\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

D'où : $(\forall x\in]-2;2[)$; $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

b. Le tableau de variations de f

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$

On a $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in[2;+\infty[$

Donc, sur l'intervalle $[2;+\infty[$, f et g ont les mêmes variations.

Sur l'intervalle $[0;2[$

Soit $x\in[0;2[$

On a $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Or : $(\forall x\in[0;2[)$; $\sqrt{4-x^2}>0$ et $-x\leqslant 0$

Donc $(\forall x\in[0;2[)$; $f'(x)\leqslant 0$

Remarque

f' s'annule en $x_0=0$ (à droite)

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(0;3)$

5. Représentation de (C_f)

Explication

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$

(C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(0;3)$

(C_f) admet une demi-tangente verticale à droite et aussi à gauche du point $A(2,1)$

La droite $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Sur l'intervalle $[-2;0]$

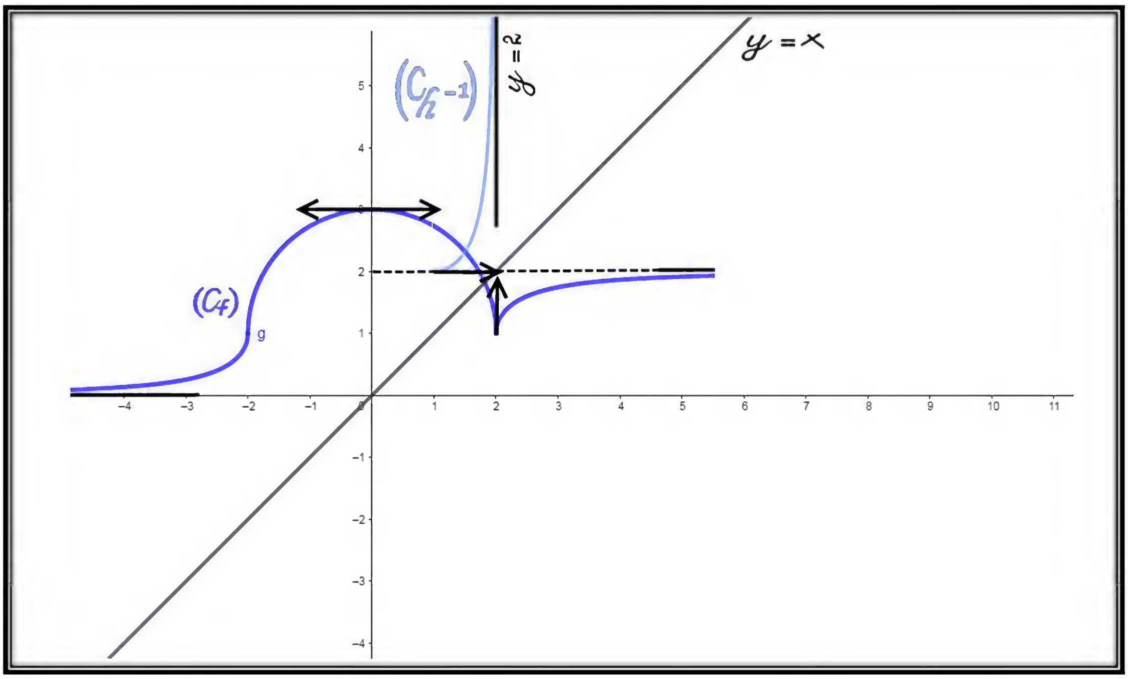
On a f est paire sur $[-2;2]$

Donc sur $[-2;2]$, (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Sur l'intervalle $]-\infty;-2]$

On a $\Omega(0;1)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Il faut représenter l'image de la demi-tangente verticale à droite du point $A(2,1)$ et aussi l'image de l'asymptote horizontale $y=2$



6. a- Montrons que h admet une fonction réciproque h^{-1}

On a h est continue sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$
(Car elle est dérivable sur $]2;+\infty[$ et continue en $x_0=2$ à droite)
Et h est strictement croissante sur I
Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$$J=h([2;+\infty[)$$
$$=\left[h(2);\lim_{x\to+\infty}h(x)\right[$$
$$=[1;2[$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b~ Construction de

Explication

- On a $\begin{cases} h \text{ est définie sur l'intervalle } I \\ h^{-1} \text{ est définie sur l'intervalle } J \end{cases}$
- (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la droite $y=x$
- La droite $y=x$ change les rôles de x et y
- L'image du point $A(2,1)$ est le point $A'(2,1)$
- L'image de la demi-tangente verticale en A (dirigeé vers le haut)
  est la demi-tangente horizontale en A' (à droite)
- L'image de l'asymptote horizontale $y=2$
  est l'asymptote verticale $x=2$

c~ Déterminons $h^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$
Soit $x\in J$, cherchons $y\in I$ tel que $h(y)=x$

$$h(y)=x \iff \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{y}=x$$
$$\iff y+\sqrt{y^2-4}=xy$$
$$\iff \sqrt{y^2-4}=xy-y$$
$$\iff y^2-4=(xy-y)^2$$
$$\iff y^2-4=x^2y^2-2xy^2+y^2$$
$$\iff x^2y^2-2xy^2+y^2-y^2=-4$$
$$\iff x^2y^2-2xy^2=-4$$
$$\iff y^2(x^2-2x)=-4$$
$$\iff y^2=-\frac{4}{x^2-2x}$$
$$\iff y^2=\frac{4}{2x-x^2}$$
$$\iff y=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}} \text{ ou } y=-\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $g(y)=x$

Remarquons que $xy-y=y(x-1)$
Or $y\geqslant 2$ et $x\geqslant 1$
Donc $xy-y>0$

Or $y\in I$

Donc $y=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$

D'où $(\forall x\in J)$; $h^{-1}(x)=\sqrt{\frac{4}{2x-x^2}}$

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x+2-2\sqrt{x-1}$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer D_f le domaine de definition de f, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. a- Étudier la branche infinie de (C_f)
   b- Montrer que : $(\forall x\in D_f)$; $f(x)-x=\dfrac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$
   c- En déduire la position relative de (C_f) et de la droite (D) d'équation $y=x$.

3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

4. a. Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$

b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]1;+\infty[$

c. Dresser le tableau de variations de f.

5. Représenter la droite (D) et la courbe (C_f)

6. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Résoudre l'équation $g(x)=g^{-1}(x)$

c. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère

d. Montrer que : $(\forall x\in J);\ g^{-1}(x)=x+2\sqrt{x-2}$

CORRECTION

1. Déterminons D_f

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x)\geqslant 0$

$$x\in D_f \iff x-1\geqslant 0$$
$$\iff x\geqslant 1$$

Donc $D_f=[1;+\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+2-2\sqrt{x-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x+2-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x+2-2\,|x|\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x+2-2x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=+\infty$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$ $x+2-2\sqrt{x-1}$ Et puisque $x\neq 2\sqrt{x}$ alors, il suffit de factoriser.

2. La branche infinie de (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=1$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, on peut toujours penser à utiliser la dernière expression donnant $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-2\sqrt{x-1}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2-2\sqrt{x-1}\right)$$
$$=-\infty$$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \to \infty \\ \to 0 \\ \to a\neq 0 \end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax) = \begin{cases} \to b \\ \to \infty \end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

b- Montrons que : $(\forall x \in D_f)$; $f(x)-x = \frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

Soit $x\in D_f$

$$f(x)-x = x+2-2\sqrt{x-1}-x$$
$$=2-2\sqrt{x-1}$$
$$=2\left(1-\sqrt{x-1}\right)$$

On factorise par 2

$$=\frac{2\left(1-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{1+\sqrt{x-1}}$$

On multiple par le conjugué pour avoir $\left(1+\sqrt{x-1}\right)$ au dénominateur

$$=\frac{2\left(1^2-\sqrt{x-1}^{\,2}\right)}{1+\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{2\left(1-(x-1)\right)}{1+\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{2(1-x+1)}{1+\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{2(2-x)}{1+\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$$

D'où : $(\forall x\in D_f)$; $f(x)-x = \frac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

c- La position relative de (C_f) et de la droite (D) : $y=x$

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$(\forall x \in D_f); f(x) - x = \dfrac{-2x+4}{1+\sqrt{x-1}}$

Et puisque : $(\forall x \in D_f); 1+\sqrt{x-1} > 0$

Alors le signe de $f(x)-x$ dépend du signe de $-2x+4$

$-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4$

$\Leftrightarrow x=2$

x	1		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	0	$-$	

x	1	2	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
La position relative	(C_f) est au dessus de (D)	$B(2,2)$ point d'intersection	(C_f) est au dessous de (D)

3 - La dérivabilité de f en $x_0=1$ à droite.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x+2-2\sqrt{x-1}-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}-\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} 1-\frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{x\to1^+} 1-\frac{2\sqrt{x-1}^{\,2}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{x\to1^+} 1-\frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{x\to1^+} 1-\frac{2}{\sqrt{x-1}}$$
$$= -\infty$$

Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 à droite, il faut calculer la limite :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si on remplace, on trouve $\frac{0}{0}$

Mais, en remarquant que $x-1\to0$ et $\sqrt{x-1}\to0$ ça sera mieux de séparer les limites

Le conjugué de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ lui même

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=1$ à droite.

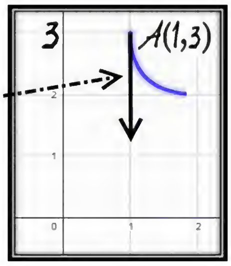
Interprétation graphique

☞ (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,3)$

(Dirigée vers le bas)

$$\lim_{x\to 1^+} \cdots = -\infty$$

$\boxed{+} \times \boxed{-} = \boxed{-}$



$\boxed{4}$ a) Montrons que f est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a : $x \mapsto x-1$ est dérivable sur $]1;+\infty[$

Et : $(\forall x \in]1;+\infty[)$; $x-1>0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$

Et : $x \mapsto -2\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$

Et comme : $x \mapsto x+2$ est dérivable

Alors $f : x \mapsto x+2-2\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$

Comme étant somme de deux fonctions dérivables

Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I
Et $(\forall x \in I)$; $u(x)>0$
Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I

b) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$

On a f est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x+2-2\sqrt{x-1}\right)' \\
&= 1+0-2\times\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} \\
&= 1-2\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x-1}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x-1}^2-1^2}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x-1}+1)} \\
&= \frac{x-2}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x-1}+1)}
\end{aligned}$$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{a'=0}$

$\boxed{(k\,u)'=k.u' \text{ tel que } k\in\mathbb{R}}$

$\boxed{(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Ça sera mieux de multiplier $\sqrt{x-1}-1$ par son conjugué pour lever la racine et pour avoir $(\sqrt{x-1}+1)$ qui est positif au dénominateur.

D'où : $(\forall x \in]1;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x-1}+1)}$

c) Le tableau de variations de f

On a : $(\forall x \in]1;+\infty[); f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$

Et puisque : $(\forall x \in]1;+\infty[); \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1) > 0$

Alors $f'(x)$ et $(x-2)$ ont le même signe

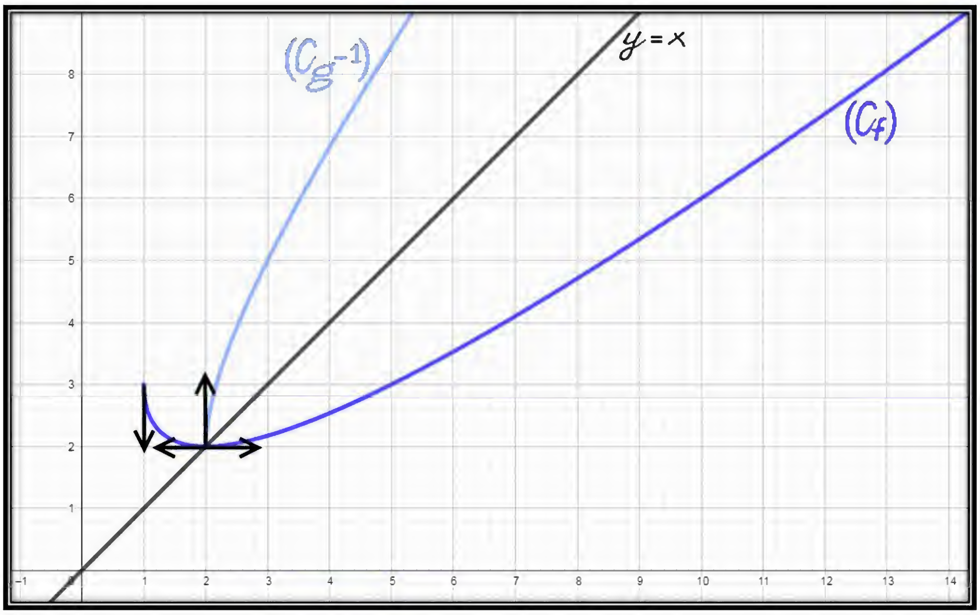
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5) La represenation de (C_f)

Explication

- Représentons les tangentes
  - La demi-tangente verticale à droite du point $A(1,3)$ (Dirigeé vers le bas)
  - D'après le tableau de variations de f :
    on a f' s'annule en $x_0=2$
    Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $B(2;f(2))$ $(f(2)=2)$
- La position relative de (C_f) et de la droite (D)
- En fin, utiliser le tableau de variations de f



6. a. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

On a g est continue sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$

Car elle est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $[2;+\infty[\subset]1;+\infty[$

Et g est strictement croissante sur l'intervalle I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$J=g([2;+\infty[)$$
$$=\left[g(2);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
$$=[2;+\infty[$$

Si g ~~est~~ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b. Résolvons l'équation $(E): g(x)=g^{-1}(x)$

Déterminons d'abord le domaine de définition de l'équation (E)

$$x\in D_E \Leftrightarrow x\in D_g \text{ et } x\in D_{g^{-1}}$$
$$\Leftrightarrow x\in I \text{ et } x\in J$$
$$\Leftrightarrow x\in I\cap J$$
$$\Leftrightarrow x\in[2;+\infty[$$

Donc $D_E=[2;+\infty[$

Il faut que $x\in I$ et $x\in J$

$g(x)=g^{-1}(x)$ C'est les abscisses des points d'intersection de (C_g) et $(C_{g^{-1}})$

$g(x)=g^{-1}(x)\Leftrightarrow g(x)=x$

$$g(x)=g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x)=x$$
$$\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{x-1}=x$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1$$
$$\Leftrightarrow x-1=1$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

Et puisque $2 \in D_E$

D'où $S=\{2\}$

c- Représentation de $(C_{g^{-1}})$

Explication

- g est définie sur $[2;+\infty[$

  g^{-1} est définie sur $[2;+\infty[$

- (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la droite $y=x$

- La droite $(\Delta): y=x$ change les rôles de x et y

  Autrement dit :

- (C_g) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $B(2;2)$

  $(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale à droite du point $B(2;2)$ dirigée vers le haut

- L'image de la branche parabolique de direction la droite $(D): y=x$

  est la branche parabolique de direction $(D): y=x$

d- Montrons que : $(\forall x \in J);\ g^{-1}(x)=x+2\sqrt{x-2}$

$$\begin{cases} g(y)=x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^{-1}(x)=y \\ x \in J \end{cases}$$

$$g(y)=x \Leftrightarrow y+2-2\sqrt{y-1}=x$$
$$\Leftrightarrow y-1-2\sqrt{y-1}+1+2=x$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$
On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y)=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}^2 - 2\sqrt{y-1} + 1 = x-2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1}-1)^2 = x-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-1 = \sqrt{x-2}$ ou $\sqrt{y-1}-1 = -\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{x-2}+1$ ou $\sqrt{y-1} = 1-\sqrt{x-2}$

Or $y \in [2;+\infty[$ et $x \in [2;+\infty[$

Donc $\sqrt{y-1} > 1$

Et par suite $\sqrt{y-1} = \sqrt{x-2}+1$

Donc $y-1 = (\sqrt{x-2}+1)^2$

$y-1 = \sqrt{x-2}^2 + 2\sqrt{x-2} + 1$

$y-1 = x-2+2\sqrt{x-2}+1$

$y = x-2+2\sqrt{x-2}+1+1$

Donc $y = x+2\sqrt{x-2}$

D'où : $(\forall x \in J)$; $g^{-1}(x) = x+2\sqrt{x-2}$

Ici, ça sera mieux de penser à l'identité remarquable $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

EXERCICE 31

Première partie — Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 4x + 6$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
   b. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c. Dresser le tableau de variations de g.
2. a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que : $-\sqrt{3} < \alpha < -\frac{5}{3}$
   b. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Deuxième partie

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

6- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2- Déterminer les branches infinies de la courbe (C_f)

3- a- Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$, pour tout $x\in D_f$

b- Étudier le signe de $f'(x)$

c- Dresser le tableau de variations de f

4- Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

5- Représenter (T) et (C_f) (On prend $f(\alpha)\approx 1{,}8$)

Première partie **CORRECTION**

1- a- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-4x+6)=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3-x^2-4x+6)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=-\infty$$

b- Calculons $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Car g est un polynôme)

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=(2x^3-x^2-4x+6)'=6x^2-2x-4$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)=6x^2-2x-4$

c- Le tableau de variations de g

Étudions le signe de $g'(x)$

On a le signe de $g'(x)$ est le signe du trinôme $6x^2-2x-4$

Son discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(6)(-4)=100$

Puisque $\Delta>0$

Alors le trinôme $6x^2-2x-4$ admet deux racines distinctes

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{100}}{2\times6}=\frac{2+10}{12}=1$$

et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{100}}{2\times6}=\dfrac{2-10}{12}=-\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$6x^2-2x-4$		+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{238}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Si $\Delta>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

supposons $x_1<x_2$

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

2 - a - Montrons l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors : $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I);\ f(x)=y$

Sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{2}{3}]$

On a g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{2}{3}]$

Et $g\left(]-\infty;-\frac{2}{3}]\right)=]\lim_{x\to-\infty}g(x);g(-\frac{2}{3})]$

$=]-\infty;\frac{238}{27}]$

Puisque $0\in]-\infty;\frac{238}{27}]$

Alors, il existe un unique reél $\alpha\in]-\infty;-\frac{2}{3}]$ tel que $g(\alpha)=0$

x	$-\infty$	α	$-\frac{2}{3}$
$g(x)$	$-\infty$	0 $\nearrow$	$\frac{238}{27}$

Sur l'intervalle $[-\frac{2}{3};+\infty[$

D'après le tableau de variations de g, on a 3 est une valeur minimale absolue de g sur $[-\frac{2}{3};+\infty[$

x	$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$g(x)$	$\frac{238}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $\forall x\in[-\frac{2}{3};+\infty[;\ g(x)\geq 3$

Donc $\forall x\in[-\frac{2}{3};+\infty[;\ g(x)\neq 0$

Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution sur $[-\frac{2}{3};+\infty[$

Conclusion

L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Vérifions que : $-\sqrt{3}<\alpha<-\frac{5}{3}$

On a $g(-\sqrt{3})=2(-\sqrt{3})^3-(-\sqrt{3})^2-4(-\sqrt{3})+6=3-2\sqrt{3}<0$

et $g(-\frac{5}{3})=2(-\frac{5}{3})^3-(-\frac{5}{3})^2-4(-\frac{5}{3})+6=\frac{17}{27}>0$

Donc $g(-\sqrt{3})\times g(-\frac{5}{3})<0$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermediaires, on aura $-\sqrt{3}<\alpha<-\frac{5}{3}$

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a)\times f(b)<0$ Alors, il existe $\alpha\in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$

x	$-\sqrt{3}$	α	$-\frac{5}{3}$
$g(x)$	$3-2\sqrt{3}<0$	0	$\frac{17}{27}>0$

b- Le signe de $g(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;\alpha]$

Soit $x\in]-\infty;\alpha]$

On a g est continue et strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$

Donc

$$x\in]-\infty;\alpha]\Rightarrow x\leqslant\alpha$$
$$\Rightarrow g(x)\leqslant g(\alpha)$$
$$\Rightarrow g(x)\leqslant 0$$

D'où: $(\forall x\in]-\infty;\alpha]);g(x)\leqslant 0$

Il faut juste lire le tableau de variations de g

x	$-\infty$	α	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$\frac{238}{27}$	3	$+\infty$

$g(x)\leqslant 0$ $g(x)\geqslant 0$

Sur l'intervalle $]\alpha;-\frac{2}{3}]$

On a g est continue et strictement croissante sur $]\alpha;-\frac{2}{3}]$

Donc

$$x\in]\alpha;-\frac{2}{3}]\Rightarrow x\geqslant\alpha$$
$$\Rightarrow g(x)\geqslant g(\alpha)$$
$$\Rightarrow g(x)\geqslant 0$$

D'où: $(\forall x\in]\alpha;-\frac{2}{3}]);g(x)\geqslant 0$

Sur l'intervalle $[-\frac{2}{3};+\infty[$

D'après le tableau de variations de g, on a 3 est une valeur minimale absolue de g sur $[-\frac{2}{3};+\infty[$

Donc $\forall x\in[-\frac{2}{3};+\infty[;g(x)\geqslant 3$

D'où: $(\forall x\in[-\frac{2}{3};+\infty[);g(x)>0$

Conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l}(\forall x\in]-\infty;\alpha]);g(x)\leqslant 0\\(\forall x\in]\alpha;+\infty[);g(x)\geqslant 0\end{array}}$$

C'est la question principale de la première partie C'est pour cela la fonction g est appelée fonction auxiliaire مساعدة

Deuxième partie

$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

$\frac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x)\neq 0$

$\sqrt[n]{u(x)} \dashrightarrow u(x)\geq 0$

1 – a – Déterminons D_f

$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x^2-2x+2\geq 0$

On sait que : $(\forall x\in\mathbb{R});(x-1)^2\geq 0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2-2x+1\geq 0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2-2x+1+1\geq 1$ et $1>0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2-2x+2>0$

Donc : $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x\neq 0$

D'où : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b – Les limites de f aux bornes de D_f

On a $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-2x+2}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-2x+2}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^2-2x+2}=\sqrt[3]{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}=+\infty$

$\boxed{\frac{1}{0^-}=-\infty}$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2-2x+2}=\sqrt[3]{2}$

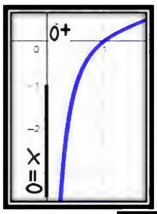
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}=-\infty$

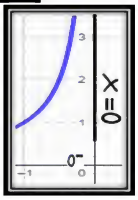
D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\boxed{\frac{1}{0^+}=+\infty}$

2. Les branches infinies de (C_f)

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\end{cases}$





Donc la droite d'équation $x=0$ (L'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_f)

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}$

Si on remplace on trouve $\frac{\infty}{\infty}$, mais $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ne pose aucun problème

$\frac{\infty}{\infty}$, on pense toujours à factoriser

Ici, à l'interieur de $\sqrt[3]{\;}$ il faut factoriser par $(-x)^3$ et non pas par x^3 car $x\to-\infty$

$\boxed{\sqrt[3]{(-x)^3}=-x}$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{-x^3\left(-\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{(-x)^3}\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{-x\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}-\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}}$$
$$=0$$

Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\infty \\ 0 \\ a\neq 0\end{cases}$

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Donc, (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{x\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$$

$$=0$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

Donc, (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3 ~a~ Montrons que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$, pour tout $x\in D_f$

Soit $x\in D_f$

$$f'(x)=\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)'$$

$$=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\sqrt[3]{x^2-2x+2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)'$$

$$=\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{x^2-2x+2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{(x^2-2x+2)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x^2}+\frac{x-1}{x}\times\frac{2x-2}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x^2}+\frac{(x-1)(2x-2)}{3x\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x^2} + \frac{2x^2-4x+2}{3x\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}\,.\,3\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}{x^2\,.\,3\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2} + \frac{x(2x^2-4x+2)}{x\,.\,3x\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^3}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2} + \frac{2x^3-4x^2+2x}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{3(x^2-2x+2)+2x^3-4x^2+2x}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2-6x+6+2x^3-4x^2+2x}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2-4x+6}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$$

D'où $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$

b- Le signe de $f'(x)$

Soit $x \in D_f$

On a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2}$

Puisque $3x^2\left(\sqrt[3]{x^2-2x+2}\right)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Et d'après le résultat de la question 2-b de la Première partie on aura :

$$\begin{cases} (\forall x \in]-\infty ; \alpha]) ; f'(x) \leqslant 0 \\ (\forall x \in]\alpha ; +\infty[) ; f'(x) \geqslant 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

C'est pour cela la fonction g est appelée fonction auxiliaire

Remarque

On a $f'(\alpha)=0$

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(\alpha ; f(\alpha))$

c- Le tableau de variations de f

D'après les résultats des questions précédentes

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$0 \notin D_f$
$f'(\alpha)=0$
$(\forall x \in]-\infty;\alpha]); f'(x) \leqslant 0$
$(\forall x \in]\alpha;+\infty[); f'(x) \geqslant 0$

4. Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$
$\quad = 1(x-1)+0$
$\quad = x-1$

$(T): y = x-1$

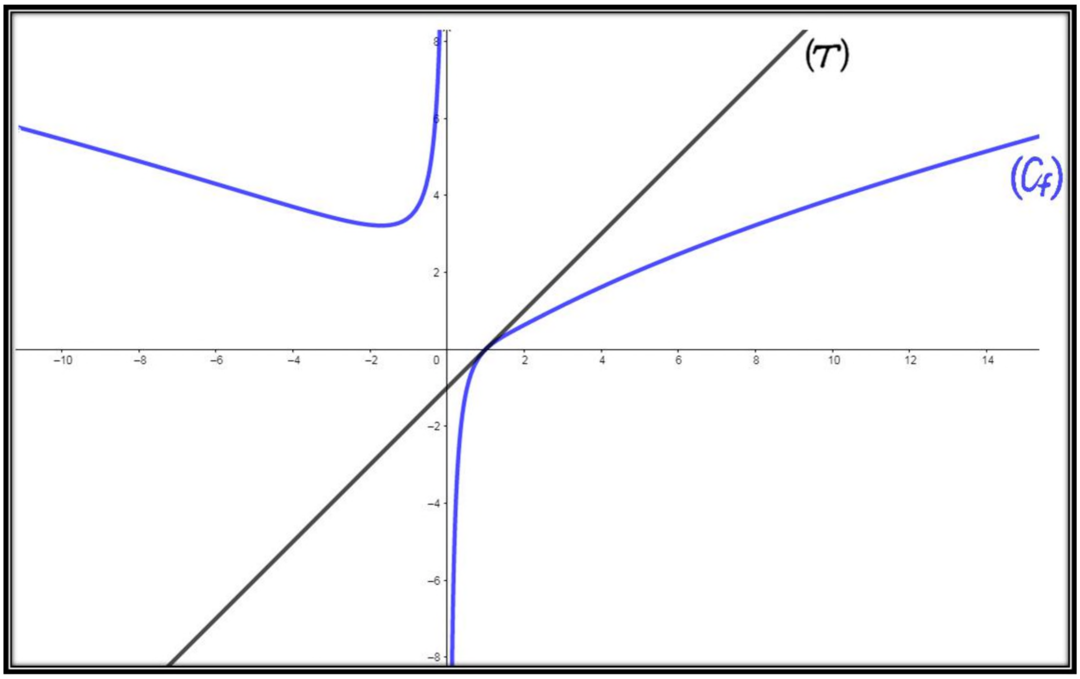
5. Représentation de (C_f)

Explication

- La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f)
- (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$
- (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$
- (C_f) admet une tangente horizontale au point $B(\alpha; f(\alpha))$

La tangente (T) passe par $C(1;0)$ et $D(2;1)$

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ



(T)
(Cf)